Math c

(B)

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, O. Haupt,
G. Köthe, W. Schmeidler

Band 197

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1957

Archiv-Nr. 180357
Satz von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Druck von Buchkunst, Berlin W 35
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 197

Seite

Bernstein, B. and **C. Truesdell,** The solution of linear differential systems by quadratures 104

Butzer, P. L., Halbgruppen von linearen Operatoren und eine Anwendung in der Approximationstheorie 112

Eichler, M., Berichtigung zu der Arbeit „Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebra" 220

Erdös, P., Einige Bemerkungen zur Arbeit von A. Stöhr: „Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe" 216

Fladt, Kuno, Die allgemeine Kegelschnittsgleichung in der ebenen hyperbolischen Geometrie 121

— —, Die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades in der hyperbolischen Geometrie 140

Kanold, Hans-Joachim, Über mehrfach vollkommene Zahlen. II 82

Kasch, Friedrich, Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen 208

Lamprecht, Erich, Struktur und Relationen allgemeiner Gaußscher Summen in endlichen Ringen. I 1

— —, Struktur und Relationen allgemeiner Gaußscher Summen in endlichen Ringen. II 27

Mitas, Günter, Bemerkungen zur Algebrentheorie 68

— —, Über Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten 76

Plünnecke, Helmut, Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie 97

Roquette, Peter, Über das Hassesche Klassenkörper-Zerlegungsgesetz und seine Verallgemeinerung für beliebige abelsche Funktionenkörper 49

Scheibe, Erhard, Über das Weylsche Raumproblem 162

Truesdell, C. siehe **B. Bernstein**

Ausgabedaten der Hefte von Bd. 197

Heft 1/2 ausgegeben am 3. Januar 1957

Heft 3/4 ausgegeben am 11. März 1957

Struktur und Relationen allgemeiner Gaußscher Summen in endlichen Ringen. I*).

Von *Erich Lamprecht* in Würzburg.

Inhalt von Teil I und Teil II.

I. Einleitung 1
§ 1. n-fache Darstellungssummen 3
§ 2. Gaußsche Summen in endlichen Ringen 9
§ 3. Die idealtheoretische Struktur von $e[\xi]$ bzw. $\Gamma(\xi)$ und idealtheoretische Hilfsbetrachtungen 13
II. § 4. Reduktionen und echte volleigentliche Gaußsche Summen 27
§ 5. Relationen mit echten volleigentlichen Gaußschen Summen 37
§ 6. Beispiele und ergänzende Bemerkungen 43
Literatur 47

Einleitung.

Die wesentliche Bedeutung der Gaußschen Summen für die Arithmetik von Zahl- und Funktionenkörpern liegt darin, daß sie algebraische Zahlen sind, die in enger Beziehung zu den L-Funktionen dieser Körper stehen. So sind z. B. die konstanten Faktoren in der Funktionalgleichung der geeignet normierten abelschen L-Funktionen von Zahl- und Funktionenkörpern Gaußsche Summen, die sich als Gaußsche Summen in kommutativen endlichen Ringen, nämlich geeigneten Restklassenringen dieser Körper schreiben lassen. Die hierdurch nahegelegte Untersuchung von Struktur und Werten Gaußscher Summen in allgemeinen kommutativen endlichen Ringen wurde vom Verfasser schon früher ausführlich behandelt [7a], [7b][1]). Jedoch konnten bisher nicht alle im Zusammenhang mit L-Funktionen auftretenden Gaußschen Summen als solche in endlichen kommutativen Ringen interpretiert werden. Wir verweisen hierzu auf die von Eichler [2a] eingeführten (speziellen) Gaußschen Summen in einfachen Algebren über Zahlkörpern und die von Hasse [5b] eingeführten galoisschen Gaußschen Summen; diese beiden Typen basieren wesentlich auf nichtkommutativen Bildungen

Hierdurch angeregt, werden in der vorliegenden Arbeit allgemeine Gaußsche Summen in endlichen nichtkommutativen Ringen eingeführt und ihre Struktur und Relationen untersucht. Diese Gaußschen Summen sind Matrizen, die in Verallgemeinerung zur Definition im kommutativen Fall als Summen von Produkten von Darstellungsmatrizen erklärt sind; das Hauptinteresse gilt den Matrizeninvarianten dieser Gaußschen Summen, d. h. den Eigenwerten, Eigenpolynomen, Spuren und den Determinanten. Bei dieser Definition lassen sich die Klassifikationen und Schlußweisen vom kommutativen

---

*) Habilitationsschrift Univ. Würzburg 1955.

[1]) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende von Teil II; erscheint in dies. Journal **197**, Heft 1/2.

Spezialfall [7a] entweder direkt übertragen oder besitzen geeignete Verallgemeinerungen. Die erhaltenen Ergebnisse für die Invarianten, insbesondere die Eigenwerte, sind als direkte Verallgemeinerungen entsprechender Aussagen für die kommutativen Gaußschen Summen erkennbar. Die Gaußschen Summen in kommutativen endlichen Ringen sind bei geeigneter Spezialisierung in unserer Definition enthalten, ebenso die oben erwähnten nichtkommutativen Gaußschen Summen von Eichler.

Für die Zweckmäßigkeit der Definition und der Klassifikationen spricht außer den Ergebnissen auch die Tatsache, daß eine Anzahl von Relationen mit Gaußschen Summen, die im Kommutativen zum Teil nur in Galoisfeldern bekannt waren, sich ohne Benutzung von höheren Hilfsmitteln auf diese neuen Gaußschen Summen übertragen lassen. Ferner muß erwähnt werden, daß gerade in den hier erstmals eingeführten Eigenpolynomen von Gaußschen Summen neue Zusammenhänge zu den L-Funktionen auftreten. Diese Eigenpolynome haben nämlich mit gewissen L-Funktionen eine Reihe von Eigenschaften gemeinsam, die man in diesem Zusammenhang nicht vermutete.

In dieser Arbeit werden neben bekannten gruppen- und darstellungstheoretischen Ergebnissen als Hilfsmittel einige idealtheoretische Überlegungen benutzt, die zum Teil neu sind, zum Teil zu neuen idealtheoretischen Untersuchungen anregen.

Zum Inhalt der Arbeit selbst ist folgendes zu sagen: Teil I. In § 1 werden zunächst einige darstellungs- und matrizentheoretische Hilfsmittel zusammengestellt, anschließend allgemeine n-fache Darstellungssummen und ihre Invarianten eingeführt (Definitionen 1 und 2) und hierfür zwei Reduktionen auf einfachere Typen angegeben. In § 2 werden die allgemeinen Gaußschen Summen in endlichen Ringen eingeführt und die obigen Reduktionen übertragen (Reduktion auf irreduzible Gaußsche Summen und solche in „Komponentenringen"). Das Voranstellen der n-fachen Darstellungssummen hat zwei Gründe: Erstens soll gezeigt werden, daß diese Reduktionen gar nicht von dem speziellen Begriff der Gaußschen Summe abhängen[2]), und zweitens sollen diese Reduktionen auch auf andere im Zusammenhang mit Gaußschen Summen auftretende Darstellungssummen anwendbar sein (vgl. § 5 und **6. 3c**).

Die weiteren Untersuchungen benutzen wesentlich die idealtheoretische Struktur der Bestimmungsstücke $e[\xi]$ und $\Gamma(\xi)$ und die damit verbundene Klassifikation der Gaußschen Summen (§ 3). Hierbei ist im Nichtkommutativen noch eine idealtheoretische Feinstruktur zu beachten; ferner wird die Untersuchung auf Ringe beschränkt, die einer zusätzlichen Bedingung **(M)** genügen. Die Abschnitte **3. 3** und **3. 4** enthalten den Nachweis, daß **(M)** in fast allen Ringtypen erfüllt ist, und einige idealtheoretische Beispiele.

Teil II. § 4 enthält die Reduktion auf den wesentlichen Typus der echten volleigentlichen Gaußschen Summen (Sätze 3, 4 und Korollare). Bei den Reduktionen werden rechnerische Umformungen von sogenannten Doppelsummen verwendet, denen folgende Überlegung zugrunde liegt: Man bildet die Summe einiger Gaußscher Summen und zeigt einerseits, daß alle Summanden gleich sind, andererseits, daß die Gesamtsumme die Nullmatrix ergibt; hieraus folgt, daß die betreffende Gaußsche Summe selbst gleich der Nullmatrix ist. Außerdem werden in § 4 noch die Eigenschaften singulärer Typen von Gaußschen Summen diskutiert.

Eine Verallgemeinerung des Charaktersummensatzes von H. L. Schmid (Satz 5), die Definition und Untersuchung verallgemeinerter Jacobischer Summen (Satz 6) und eine Relation zwischen induzierten Gaußschen Summen (Satz 7) ist der Inhalt von § 5. In § 6 wird durch Beispiele der Existenznachweis für verschiedene Typen Gaußscher Summen erbracht; einige ergänzende Bemerkungen werden angeschlossen.

---

[2]) Die Überlegungen lassen sich fast wörtlich auf andere Charaktersummen übertragen, z. B. auf Kloostermansche Summen (vgl. [9]).

§ 1. *n*-fache Darstellungssummen.

1. 1. Darstellungstheoretische und matrizentheoretische Vorbemerkungen.

Ist $\mathfrak{G}$ eine endliche i. a. nichtkommutative Gruppe, so verstehen wir unter einer *Darstellung* $\Gamma(\xi)$ ($\xi \in \mathfrak{G}$) von $\mathfrak{G}$ stets eine Matrizendarstellung in einem Zahlkörper der Charakteristik 0, d. h. eine zu $\mathfrak{G}$ homomorphe multiplikative Gruppe regulärer (Determinante $\neq 0$), quadratischer Matrizen, deren Matrizenelemente x_{ik} komplexe und i. a. sogar algebraische Zahlen sind; es gilt also

$$\Gamma(\xi_1)\,\Gamma(\xi_2) = \Gamma(\xi_1\xi_2) \quad \text{für} \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{G}. \tag{1. 1}$$

Die Zeilenzahl der Matrizen heiße wie üblich der Grad $l(\Gamma)$ der Darstellung Γ, $E_{l(\Gamma)}$ bedeute die $l(\Gamma)$-reihige Einheitsmatrix und $0_{l(\Gamma)}$ die $l(\Gamma)$-reihige Nullmatrix. Zunächst seien einige bekannte Tatsachen und Regeln aus der Theorie dieser Matrizendarstellungen, die in dieser Arbeit verwendet werden, aufgezählt[3]).

1. 1a. *Äquivalenz von Darstellungen.* Zwei Matrizendarstellungen $\Gamma(\xi)$ und $\Gamma'(\xi)$ von $\mathfrak{G}$ heißen *äquivalent*, in Zeichen $\Gamma \sim \Gamma'$, falls

$$\Gamma'(\xi) = P^{-1}\Gamma(\xi)\,P \quad \text{für jedes } \xi \in \mathfrak{G} \quad \text{mit fester regulärer Matrix } P\ (|P| \neq 0). \tag{1. 2}$$

Äquivalente Darstellungen haben den gleichen Grad $l(\Gamma) = l(\Gamma')$; die Gesamtheit der zu Γ äquivalenten Darstellungen ist die *Darstellungsklasse* $\{\Gamma\}$. Invarianten der Darstellungsklasse $\{\Gamma\}$, d. h. unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten $\Gamma(\xi)$, sind die folgenden Matrizeninvarianten:

1) die charakteristischen Polynome (*Eigenpolynome*) $|t \cdot E_{l(\Gamma)} - \Gamma(\xi)|$ der Darstellungsmatrizen und ihre $l(\Gamma)$ Nullstellen (*Eigenwerte*);

2) die *Determinanten* $|\Gamma(\xi)|$ der Darstellungsmatrizen;

3) die Charaktere $\chi(\xi) = \mathrm{Sp}\,(\Gamma(\xi))$, d. h. die Summe der Hauptdiagonalglieder der Darstellungsmatrizen.

1. 1b. *Unitäre Darstellungen.* Eine reguläre quadratische Matrix $X = (x_{ik})$ heißt *unitär*, wenn ihre Reziproke gleich ihrer konjugiert-komplex-transponierten Matrix, d. h. $(x_{ik})^{-1} = (\overline{x_{ki}})$ ist. In jeder Darstellungsklasse $\{\Gamma\}$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt es *unitäre Darstellungen* Γ, so daß

$$\Gamma(\xi)^{-1} = \overline{\Gamma(\xi)}^{*} \quad \text{für alle } \xi \in \mathfrak{G}\ ^{4)}. \tag{1. 3}$$

Sind endlich viele unitäre Matrizen $X_1, \ldots, X_s$ miteinander vertauschbar, so existiert mindestens eine unitäre Matrix U, so daß $U^{-1}X_1U, \ldots, U^{-1}X_sU$ gleichzeitig Diagonalmatrizen werden. Hieraus folgt: *Die Eigenwerte einer unitären Matrix X haben sämtlich den absoluten Betrag* 1[5]).

1. 1c. *Vollständige Reduzibilität.* Jede Darstellung $\Gamma(\xi)$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist einer vollständig reduziblen Darstellung $\Gamma'(\xi)$ äquivalent; bei Verwendung der direkten Summenschreibweise von Matrizen ist also:

$$\Gamma(\xi) \sim \Gamma'(\xi) = g_1\Gamma_1(\xi) \oplus \cdots \oplus g_r\Gamma_r(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathfrak{G}, \tag{1. 4}$$

wobei die g_i natürliche Zahlen und die Γ_i absolut-irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{G}$ sind[6]).

Ist eine Matrix $\Gamma(\xi)$, die nicht notwendig Darstellungsmatrix zu sein braucht, in der Form (1. 4) äquivalent einer direkten Summe von Matrizen $\Gamma_i(\xi)$, so gelten für die in **1. 1a** erklärten Invarianten folgende Kompositionsregeln:

$$\begin{aligned} &|t \cdot E_{l(\Gamma)} - \Gamma(\xi)| = \prod_{i=1}^{r} |t \cdot E_{l(\Gamma_i)} - \Gamma_i(\xi)|^{g_i}, \\ &|\Gamma(\xi)| = |\Gamma'(\xi)| = \prod_{i=1}^{r} |\Gamma_i(\xi)|^{g_i}, \\ &\chi(\xi) = \chi'(\xi) = \sum_{i=1}^{r} g_i\chi_i(\xi), \quad \chi_i(\xi) = \mathrm{Sp}\,(\Gamma_i(\xi)); \end{aligned} \tag{1. 5}$$

die Eigenwerte bestimmen sich aus der Zerlegung der Eigenpolynome.

---

[3]) Vgl. hierzu etwa [8], [11], [12].

[4]) Mit X^* bezeichnen wir die transponierte Matrix von X.

[5]) Seien X und X^{-1} unitäre Matrizen und U eine unitäre Matrix mit der Eigenschaft, daß $U^{-1}XU = D$ und $U^{-1}X^{-1}U = D^{-1}$ Diagonalmatrizen werden, so ist $\overline{D}^* = (\overline{U}^{-1}\overline{X}\overline{U})^* = \overline{U}^*(\overline{U}^{-1}\overline{X})^* = U^{-1}X^{-1}U = D^{-1}$ d. h. wenn $D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$, so ist $D^{-1} = \overline{D}^* = \begin{pmatrix} \bar{d}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{d}_{nn} \end{pmatrix}$, also $d_{\nu\nu}\bar{d}_{\nu\nu} = 1$, woraus die Behauptung folgt.

[6]) Bei allen Darstellungsmatrizen $\Gamma'(\xi)$ stehen auf der Hauptdiagonalen Matrizen $\Gamma_i(\xi)$ in den Vielfachheiten g_i und sonst überall Nullen.

1. 1d. *Kroneckerprodukt von Darstellungen.* Ist eine endliche Gruppe direktes Produkt zweier Untergruppen, d. h. $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)}$, so ist jede irreduzible Darstellung Γ von $\mathfrak{G}$ äquivalent einem Kroneckerprodukt irreduzibler Matrizendarstellungen der Faktoren $\mathfrak{G}^{(i)}$, d. h.

(1. 6) $\quad \Gamma \sim \Gamma' = \Gamma^{(1)} \times \Gamma^{(2)}$, wo $\Gamma^{(i)}$ irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}^{(i)}$ ist $(i = 1, 2)$.

Entsprechendes gilt, wenn $\mathfrak{G}$ direktes Produkt mehrerer Gruppen ist[7]).

Einige Rechenregeln für das Kroneckerprodukt quadratischer Matrizen bzw. seine Invarianten seien vermerkt:

$$(1.7) \qquad (X^{(1)} \times X^{(2)})(Y^{(1)} \times Y^{(2)}) = X^{(1)}Y^{(1)} \times X^{(2)}Y^{(2)}, \quad \chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y),$$
$$|X \times Y| = |X|^{l(Y)}\,|Y|^{l(X)} \; (l(X) \text{ Grad von } X,\ l(Y) \text{ Grad von } Y);$$

die $l(X)\,l(Y)$ Produkte je eines Eigenwertes von X mit einem solchen von Y liefern die Gesamtheit der Eigenwerte von $X \times Y$[8]).

1. 1e. *Spezielle Darstellungen.* Die Darstellungsklasse der sogenannten *regulären Darstellung von* $\mathfrak{G}$ enthält im Sinne von **1. 1c** jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ so oft, wie deren Grad angibt. Die reguläre Darstellung von $\mathfrak{G}$ kann so gewählt werden (vgl. das Konstruktionsschema mit Hilfe der Gruppentafel), daß die Elemente der Darstellungsmatrizen alle *ganzalgebraische Zahlen* sind, nämlich genauer, daß in jeder Zeile und jeder Spalte jeder Darstellungsmatrix genau eine 1 und sonst lauter Nullen stehen[9]).

Eine weitere spezielle Darstellung ist die *identische Darstellung*, die jedem Gruppenelement die einreihige Einheitsmatrix zuordnet. Enthält eine Darstellung $\Gamma(\xi)$ im Sinne von **1. 1c** nicht die identische Darstellung, so gilt die Summenregel

$$(1.8) \qquad \sum_{\xi \in \mathfrak{G}} \Gamma(\xi) = 0_{l(\Gamma)}.$$

1. 1f. *Die Eigenwerte des Produktes vertauschbarer Matrizen.* Sind X und Y zwei vertauschbare l-reihige Matrizen, d. h. ist $XY = YX$, so sind die Eigenwerte x_λ bzw. y_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ von X bzw. Y so numerierbar, daß die l Produkte $x_\lambda y_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ die Gesamtheit der Eigenwerte von $XY = YX$ liefern[10]).

1. 1g. *Wertisomorphe Übertragung von Darstellungswerten.* Sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^\sigma$ zwei isomorphe endliche Gruppen und ist σ eine feste isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^\sigma$, d. h. $\xi^\sigma \in \mathfrak{G}^\sigma$ für $\xi \in \mathfrak{G}$, ist ferner $\Gamma(\xi)$ eine Matrizendarstellung von $\mathfrak{G}$, so wird durch

$$(1.9) \qquad \Gamma^\sigma(\xi^\sigma) = \Gamma(\xi)$$

eine wertisomorphe Darstellung Γ^σ von $\mathfrak{G}^\sigma$ induziert.

1. 1h. *1. Induktionsregel* (*Induktion nach unten*). Ist $\Gamma(\xi)$ eine Matrizendarstellung der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so induziert $\Gamma(\xi)$ durch seine Werte (Matrizen) für die Elemente ξ von $\mathfrak{U}$ eine Darstellung Γ von $\mathfrak{U}$.

1. 1i. *2. Induktionsregel* (*Induktion nach oben*). Ist $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, Δ eine Darstellung von $\mathfrak{U}$ und η_i ein festes Vertretersystem der Rechtsklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{U}$, so wird durch die Festsetzung

$$(1.10) \qquad \Gamma_\Delta(\xi) = \left(\Delta(\eta_i\,\xi\,\eta_k^{-1})\right)_{i,k} \quad \text{für alle } \xi \in \mathfrak{G}$$
$$\text{mit } \Delta(\eta_i\,\xi\,\eta_k^{-1}) = \begin{cases} \Delta(\eta_i\,\xi\,\eta_k^{-1}) & \text{falls } \eta_i\,\xi\,\eta_k^{-1} \in \mathfrak{U}, \\ 0_{l(\Delta)} & \text{falls } \eta_i\,\xi\,\eta_k^{-1} \notin \mathfrak{U}, \end{cases}$$

die durch Δ in $\mathfrak{G}$ induzierte Darstellung Γ_Δ definiert. Es gilt dann folgender Satz von Frobenius: Ist Γ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ und Δ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{U}$, so ist Δ in der durch Γ gemäß **1. 1h** in $\mathfrak{U}$ induzierten Darstellung genau so oft enthalten, wie Γ in der durch Δ gemäß (1. 10) induzierten Darstellung Γ_Δ von $\mathfrak{G}$[11]).

1. 1j. *3. Induktionsregel* (*Faktorgruppeninduktion*). Ist $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ eine Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ und $\gamma(\bar{\xi})$ eine Darstellung von $\overline{\mathfrak{G}}$, so wird durch die Festsetzung

$$(1.11) \qquad \Gamma(\xi) = \gamma(\bar{\xi}) \quad (\xi \in \mathfrak{G},\ \bar{\xi} = \text{Restklasse von } \xi \bmod \mathfrak{N})$$

eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ mit $l(\Gamma) = l(\gamma)$ induziert.

---

[7]) Durch Transformation mit regulären Matrizen ist es möglich, bei einem mehrfachen Kroneckerprodukt (von Darstellungsmatrizen) einen direkten Faktor an die erste Stelle zu bringen (man benutzt hierzu kombinierte Zeilen und Spaltenvertauschungen).

[8]) Vgl. [8], Theorem 43. 8 (S. 83) und Corollary 43. 81 (S. 84); die Komposition der Eigenpolynome folgt aus der der Eigenwerte.

[9]) Allgemeiner lassen sich die Matrizenelemente jeder Darstellung schon in einem geeigneten endlich-algebraischen Zahlkörper wählen (wenn die Einheitswurzeln von genügend hoher Ordnung in ihm enthalten sind).

[10]) Vgl. [8], S. 22, Theorem 16. 1.

[11]) Vgl. hierzu etwa [11] S. 200, [12] S. 77 oder [5a] S. 148.

1. 1k. *1. Normalteilerregel.* Ist $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist das Kompositum $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ aller zu $\mathfrak{U}$ konjugierten Untergruppen $\mathfrak{U}^\xi = \xi\mathfrak{U}\xi^{-1}$ mit $\xi \in \mathfrak{G}$ (die Elemente von $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ sind endliche Produkte aus Elementen der $\mathfrak{U}^\xi$) der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{G}$, der $\mathfrak{U}$ umfaßt. Wir nennen $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ den $\mathfrak{U}$ *zugeordneten Normalteiler.*

Ist $\Gamma(\xi)$ eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ vom Grad $l(\Gamma)$, so bedeute $\Gamma(\xi) = E_{l(\Gamma)}$ auf der Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$, daß $\Gamma(\xi) = E_{l(\Gamma)}$ ist für alle $\xi \in \mathfrak{U}$. Die 1. Normalteilerregel besagt dann:

$$\text{(1. 12)} \qquad \text{Aus } \Gamma(\xi) = E_{l(\Gamma)} \text{ auf } \mathfrak{U} \text{ folgt } \Gamma(\xi) = E_{l(\Gamma)} \text{ auf } \mathfrak{N}(\mathfrak{U}).$$

Falls nämlich $\Gamma(\xi) = E_{l(\Gamma)}$ auf $\mathfrak{U}$, so ist $\Gamma(\xi) = E_{l(\Gamma)}$ auf jeder konjugierten Untergruppe $\mathfrak{U}^\xi$ und somit auch $\Gamma(\xi) = E_{l(\Gamma)}$ auf $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$, da jedes Element von $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ als Produkt endlich vieler Elemente der $\mathfrak{U}^\xi$ dargestellt werden kann.

1. 1l. *2. Normalteilerregel.* Ist $\Gamma(\xi)$ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\Gamma(\xi) \neq E_{l(\Gamma)}$ auf $\mathfrak{N}$, so enthält die durch $\Gamma(\xi)$ auf $\mathfrak{N}$ gemäß **1. 1h** induzierte Darstellung nicht die identische Darstellung von $\mathfrak{N}$.

Beweis. Ist Δ_1 die identische Darstellung von $\mathfrak{N}$, Γ_{Δ_1} die durch Δ_1 in $\mathfrak{G}$ induzierte Darstellung, so folgt $\Gamma_{\Delta_1}(\xi) = E_{l(\Gamma_{\Delta_1})}$ auf $\mathfrak{N}$, da $\mathfrak{N}$ Normalteiler ist. Die irreduzible Darstellung $\Gamma(\xi)$ kann also nicht in $\Gamma_{\Delta_1}(\xi)$ enthalten sein, was wegen **1. 1i** die Behauptung ergibt.

1. 2. *n*-fache Darstellungssummen und ihre Invarianten.

Definition 1. *Ist M eine Menge von endlich vielen Elementen ξ, sind $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ n endliche Gruppen, ist weiter $\psi_i(\xi)$ für $i = 1, \ldots, n$ eine eindeutige Abbildung von M in $\mathfrak{G}_i$ und ist jeweils Γ_i eine Matrizendarstellung von $\mathfrak{G}_i$ vom Grad $l(\Gamma_i)$, so nennen wir die Summe*

$$\text{(1. 13)} \qquad \tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M) = \sum_{\xi \in M} \Gamma_1(\psi_1(\xi)) \times \cdots \times \Gamma_n(\psi_n(\xi)),$$

der n-fachen Kroneckerprodukte der Matrizendarstellungen eine allgemeine n-fache Darstellungssumme. Sind speziell alle Darstellungen Γ_i irreduzibel, so heiße $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$ eine irreduzible n-fache Darstellungssumme.

Die so definierte Darstellungssumme ist eine $(l(\Gamma_1) \cdots l(\Gamma_n))$-reihige quadratische Matrix, deren Elemente komplexe Zahlen sind. Unser vornehmliches Interesse gilt jedoch nicht diesen Matrizen, sondern eindeutig durch sie bestimmten komplexen (oder genauer: algebraischen) Zahlen, die nur von den Darstellungsklassen $\{\Gamma_i\}$ abhängen sollen.

Ersetzt man unter Beachtung von (1. 2) und (1. 7) einige oder alle Darstellungen Γ_i durch äquivalente, so geht wegen der beiderseitigen Distributivität der Matrizenmultiplikation die n-fache Darstellungssumme in eine äquivalente Matrix über. Folglich sind die Matrizeninvarianten von $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$ auch Invarianten der Darstellungsklassen.

Definition 2. $\mathbf{2_1}$. *Das charakteristische Polynom*

$$\text{(1. 14)} \quad F(t; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M) = |\, t \cdot E_{l(\tau)} - \tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)\,|,$$

wo $l(\tau) = l(\Gamma_1) \cdots l(\Gamma_n)$ die Zeilenzahl von τ und $E_{l(\tau)}$ die $l(\tau)$-reihige Einheitsmatrix ist, nennen wir das Eigenpolynom (oder die Invariante 1. Art) der n-fachen Darstellungssumme $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$; seine $l(\tau)$ Nullstellen $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, l(\tau))$ heißen die Eigenwerte von $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$.

$\mathbf{2_2}$. *Die Determinante $|\,\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)\,|$ nennen wir die Norm (oder Invariante 2. Art) der n-fachen Darstellungssumme $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$.*

$\mathbf{2_3}$. *Die Spur der Matrix $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$, d. h.*

$$\text{(1. 15)} \quad \mathrm{Sp}\,(\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)) = \tau(\chi_1, \ldots, \chi_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M),$$

nennen wir die Spur (oder Invariante 3. Art) der n-fachen Darstellungssumme.

Die Eigenwerte und die Invarianten 2. und 3. Art einer n-fachen Darstellungssumme sind gemäß ihrer Definition komplexe Zahlen.

Unter Beachtung von **1. 1a** und **1. 1d**, insbesondere von (1. 7), können die gemäß (1. 15) definierten Invarianten 3. Art der n-fachen Darstellungssummen, da Spurbildung und Summation von Matrizen vertauschbar sind, in der Form

$$(1.16)\qquad \tau(\chi_1, \ldots, \chi_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M) = \sum_{\xi \in M} \chi_1(\psi_1(\xi)) \cdots \chi_n(\psi_n(\xi))$$

geschrieben werden.

Sind alle Darstellungen Γ_i vom Grad 1, so stimmen die Norm und Spur sowie der (einzige) Eigenwert mit der Darstellungssumme überein.

Da wir uns im folgenden nur für die Invarianten der n-fachen Darstellungssummen interessieren, können wir fortan bei jeder Untersuchung zu besonders geeigneten Vertretern der Darstellungsklassen übergehen.

1. 3. Reduktion der allgemeinen n-fachen Darstellungssummen auf irreduzible Darstellungssummen und die Ganzalgebraizität ihrer Invarianten.

Wir untersuchen zunächst, wie sich die direkte Summenzerlegung einer Darstellung, d. h. ihre Reduzibilität, auf die Invarianten der n-fachen Darstellungssumme auswirkt. Ist etwa $\Gamma_i = \Gamma_i' \oplus \Gamma_i''$, so kann gemäß **1. 1d** (vgl. Fußnote [7])) das Kroneckerprodukt der Darstellungen äquivalent so transformiert werden, daß Γ_i in (1. 13) an erster Stelle steht; wir nehmen also o. B. d. A. an, daß $\Gamma_1 = \Gamma_1' \oplus \Gamma_1''$ ist. Dann ist die n-fache Darstellungssumme die direkte Matrizensumme der mit Γ_1' bzw. Γ_1'' gebildeten Darstellungssummen, d. h.

$$(1.17)\qquad \begin{aligned} &\tau(\Gamma_1' \oplus \Gamma_1'', \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M) \\ &= \tau(\Gamma_1', \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M) \oplus \tau(\Gamma_1'', \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M). \end{aligned}$$

Hieraus folgen für die Invarianten der Darstellungssumme die (1. 5) entsprechenden Zerlegungen. Diese Reduktion kann schrittweise fortgesetzt werden. Da jede Darstellung Γ_i äquivalent einer vollständig reduziblen Darstellung ist, können die Invarianten jeder Darstellungssumme nach folgender Regel durch diejenigen irreduzibler n-facher Darstellungssummen ausgedrückt werden.

Reduktionsregel 1. *Besitzen die Darstellungen Γ_i für $i = 1, \ldots, n$ die äquivalenten Zerlegungen $\Gamma_i \sim g_{i1}\Gamma_{i1} \oplus \cdots \oplus g_{is_i}\Gamma_{is_i}$ in absolut-irreduzible Darstellungen $\Gamma_{i\sigma_i}$ mit ganzzahligen positiven Vielfachheiten $g_{i\sigma_i}$ $(\sigma_i = 1, \ldots, s_i;\ i = 1, \ldots, n)$, so folgen für die Invarianten der n-fachen Darstellungssumme $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$ folgende Zerlegungen:*

$$(1.18)\qquad \begin{aligned} &F(t;\ \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \prod_{\sigma_i=1}^{s_i} F(t;\ \Gamma_{1\sigma_1}, \ldots, \Gamma_{n\sigma_n};\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)^{g_{1\sigma_1} g_{2\sigma_2} \cdots g_{n\sigma_n}}; \end{aligned}$$

die Gesamtheit der Eigenwerte $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, l(\tau))$ besteht aus allen Eigenwerten $\tau(\Gamma_{1\sigma_1}, \ldots, \Gamma_{n\sigma_n};\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)_\lambda$ der irreduziblen Darstellungssumme $\tau(\Gamma_{1\sigma_1}, \ldots, \Gamma_{n\sigma_n};\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$, jeden mit der zugehörigen Vielfachheit $g_{1\sigma_1} \cdots g_{n\sigma_n}$ gezählt. Norm und Spur setzen sich gemäß

$$(1.19)\qquad \begin{aligned} &|\,\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)\,| \\ &= \prod_{i=1}^{n} \prod_{\sigma_i=1}^{s_i} |\,\tau(\Gamma_{1\sigma_1}, \ldots, \Gamma_{n\sigma_n};\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)\,|^{g_{1\sigma_1} g_{2\sigma_2} \cdots g_{n\sigma_n}}, \end{aligned}$$

$$(1.20)\qquad \tau(\chi_1, \ldots, \chi_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma_i=1}^{s_i} g_{1\sigma_1} g_{2\sigma_2} \cdots g_{n\sigma_n} \tau(\chi_{1\sigma_1}, \ldots, \chi_{n\sigma_n};\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$$

aus denen der irreduziblen Darstellungssummen zusammen.

Sei jetzt speziell jede der n Darstellungen $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ die reguläre Darstellung der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ und zwar sei jeweils Γ_i gemäß **1. 1e** nach dem Schema der Gruppentafel gewählt, so daß die Elemente jeder Matrix entweder Null oder Eins, also stets ganzrationale Zahlen sind. Dann ist die hiermit gebildete n-fache Darstellungssumme eine Matrix mit ganzalgebraischen (sogar ganzrationalen) Elementen. Folglich ist das Eigenpolynom dieser Darstellungssumme ein Polynom mit ganzrationalen Koeffizienten und dem höchsten Koeffizienten 1 (vgl. Definition 2); also sind alle Eigenwerte dieser speziellen n-fachen Darstellungssumme ganzalgebraische Zahlen.

Da die reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe jede irreduzible Darstellung dieser Gruppe äquivalent enthält (vgl. **1. 1e**), folgt aus der Reduktionsregel 1 zunächst, daß die Eigenwerte jeder irreduziblen n-fachen Darstellungssumme ganzalgebraische Zahlen sind, und weiter sogar, daß die Eigenwerte jeder n-fachen Darstellungssumme *ganzalgebraische Zahlen* sind. Somit sind auch Norm und Spur als Produkt bzw. Summe dieser Eigenwerte wieder ganzalgebraische Zahlen und auch die Koeffizienten jedes Eigenpolynoms einer n-fachen Darstellungssumme sind ganzalgebraische Zahlen.

Wir formulieren das Ergebnis als

Satz 1. *Die Eigenwerte, die Norm und die Spur jeder n-fachen Darstellungssumme* $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$ *sind ganzalgebraische Zahlen, das Eigenpolynom ist ein Polynom mit ganzalgebraischen Koeffizienten, die nur von den Darstellungsklassen* $\{\Gamma_1\}, \ldots, \{\Gamma_n\}$ *abhängen; sie bestimmen sich gemäß der Reduktionsregel 1 aus den Invarianten bzw. Eigenwerten der zugehörigen irreduziblen n-fachen Darstellungssummen.*

Die durch die Reduktionsregel 1 gegebene Zurückführung auf irreduzible Bestandteile braucht noch nicht auf wirklich irreduzible Bestandteile zu führen. Es kann nämlich sein, daß für ein (oder mehrere) ψ_i die Bildmenge $\psi_i(\xi)$ für alle $\xi \in M$ in einer echten Untergruppe $\mathfrak{U}_i$ von $\mathfrak{G}_i$ liegt und die durch die in $\mathfrak{G}_i$ irreduzible Darstellung $\Gamma_i(\xi)$ gemäß der 1. Induktionsregel **1. 1h** in $\mathfrak{U}_i$ induzierte Darstellung in $\mathfrak{U}_i$ nicht mehr irreduzibel ist; dann ist durch Einengung von $\mathfrak{G}_i$ auf $\mathfrak{U}_i$ die n-fache Darstellungssumme weiter zerlegbar.

1. 4. Die Komponentenzerlegung der irreduziblen n-fachen Darstellungssummen.

Während die erste Reduktion der n-fachen Darstellungssummen nur von der Reduzibilität der Matrizendarstellungen Gebrauch machte, geben wir jetzt eine weitere Reduktion irreduzibler Darstellungssummen an, die immer dann möglich ist, falls die endliche Menge M, die Abbildungen ψ_i und die Gruppen $\mathfrak{G}_i$ folgende Voraussetzungen erfüllen:

Die endliche Menge M sei (im Sinne der Isomorphie) ein geordnetes Paar von zwei nicht einelementigen Mengen M_1, M_2, also $M = [M_1, M_2]$, und jedes Element $\xi \in M$ sei in der Form $\xi = [\xi_1, \xi_2]$ mit $\xi_1 \in M_1$, $\xi_2 \in M_2$ darstellbar. (Insbesondere ist also die Elementanzahl von M das Produkt der Elementanzahlen von M_1 und M_2.) Ferner sei

$$(1.21)\qquad \mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_i^{(1)} \times \mathfrak{G}_i^{(2)} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

d. h. die Gruppen $\mathfrak{G}_i$ seien direkte Produkte von Untergruppen $\mathfrak{G}_i^{(1)}$ und $\mathfrak{G}_i^{(2)}$, wobei wir allerdings zulassen, daß diese direkte Produktzerlegung für einige oder alle der $\mathfrak{G}_i$ nicht echt ist, d. h. daß einige oder alle der Faktoren $\mathfrak{G}_i^{(2)} = \mathfrak{E}$ (Einheitsgruppe) oder $\mathfrak{G}_i^{(2)} \cong \mathfrak{G}_i$ sind.

Ferner sollen die Bildelemente bei allen Abbildungen ψ_i $(i = 1, \ldots, n)$ in der folgenden Weise entsprechend (1. 21) in Komponenten aufgespalten sein:

$$\psi_i(\xi) = \psi_i([\xi_1, \xi_2]) = \psi_{i1}(\xi_1) \times \psi_{i2}(\xi_2), \tag{1. 22}$$

wobei $\psi_{i1}(\xi_1) \in \mathfrak{G}_i^{(1)}$, $\psi_{i2}(\xi_2) \in \mathfrak{G}_i^{(2)}$ und $\psi_{ij}(\xi_i)$ jeweils nur von der Komponente ξ von ξ abhängt, für alle $\xi = [\xi_1, \xi_2]$ und $i = 1, \ldots, n$.

Alle Darstellungen Γ_i $(i = 1, \ldots, n)$ seien irreduzibel[12]). Nach **1. 1d** ist dann für $i = 1, \ldots, n$

$$\Gamma_i(\psi_i(\xi)) = \Gamma_i^{(1)}(\psi_{i1}(\xi_1)) \times \Gamma_i^{(2)}(\psi_{i2}(\xi_2)), \tag{1. 23}$$

wobei $\Gamma_i^{(j)}$ irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}_i^{(j)}$ und gemäß (1. 22) bestimmt ist $(j = 1, 2)$[13]).

Die irreduzible n-fache Darstellungssumme selbst besitzt beim Übergang zu geeigneten äquivalenten Darstellungen bzw. Matrizen folgende Zerlegung

$$\begin{aligned}
\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ [M_1, M_2]) &= \sum_{\xi \in [M_1, M_2]} \Gamma_1(\psi_1(\xi)) \times \cdots \times \Gamma_n(\psi_n(\xi)) \\
&\sim \sum_{\xi_1 \in M_1} \sum_{\xi_2 \in M_2} \Gamma_1^{(1)}(\psi_{11}(\xi_1)) \times \Gamma_1^{(2)}(\psi_{12}(\xi_2)) \times \cdots \times \Gamma_n^{(1)}(\psi_{n1}(\xi_1)) \times \Gamma_n^{(2)}(\psi_{n2}(\xi_2)) \\
&\sim \Big(\sum_{\xi_1 \in M_1} \Gamma_1^{(1)}(\psi_{11}(\xi_1)) \times \cdots \times \Gamma_n^{(1)}(\psi_{n1}(\xi_1))\Big) \times \Big(\sum_{\xi_2 \in M_2} \Gamma_1^{(2)}(\psi_{12}(\xi_2)) \times \cdots \times \Gamma_n^{(2)}(\psi_{n2}(\xi_2))\Big);
\end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned}
&\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ [M_1, M_2]) \\
&\quad \sim \tau(\Gamma_1^{(1)}, \ldots, \Gamma_n^{(1)};\ \psi_{11}, \ldots, \psi_{n1};\ M_1) \times \tau(\Gamma_1^{(2)}, \ldots, \Gamma_n^{(2)};\ \psi_{12} \ldots, \psi_{n2};\ M_2) \\
&\quad \text{mit } \tau(\Gamma_1^{(j)}, \ldots, \Gamma_n^{(j)};\ \psi_{1j}, \ldots, \psi_{nj};\ M_j) = \sum_{\xi_j \in M_j} \Gamma_1^{(j)}(\psi_{1j}(\xi_j)) \times \cdots \times \Gamma_n^{(j)}(\psi_{nj}(\xi_j)).
\end{aligned} \tag{1. 24}$$

Wir nennen die n-fachen Darstellungssummen $\tau(\Gamma_1^{(j)}, \ldots, \Gamma_n^{(j)};\ \psi_{1j}, \ldots, \psi_{nj};\ M_j)$ die *Komponenten von* $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$ *bei der Zerlegung* $M = [M_1, M_2]$.

Da unsere n-fache Darstellungssumme nach (1. 24) äquivalent einem Kroneckerprodukt von Matrizen ist, lassen sich ihre Invarianten gemäß (1. 7) durch Invarianten ihrer Komponenten ausdrücken. Wir formulieren diese Zurückführung in

Reduktionsregel 2. *Ist* $M = [M_1, M_2]$ *ein geordnetes Paar von Mengen* M_1, M_2, *sind die Gruppen* $\mathfrak{G}_i$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *gemäß* (1. 21) *direkte Produkte von Untergruppen* $\mathfrak{G}_i^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ *und besitzen die eindeutigen Abbildungen* ψ_i *die in* (1. 22) *geforderte Eigenschaft, so ist die irreduzible n-fache Darstellungssumme* $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M)$ *entsprechend* (1. 24) *äquivalent dem Kroneckerprodukt ihrer Komponenten. Die Invarianten von* $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ [M_1, M_2])$ *bestimmen sich, wie folgt, aus denen der Komponenten* $\tau(\Gamma_1^{(j)}, \ldots, \Gamma_n^{(j)};\ \psi_{1j}, \ldots, \psi_{nj};\ M_j)$:

Die $l_1 l_2$ *Produkte* $\tau(\Gamma_1^{(1)}, \ldots, \Gamma_n^{(1)};\ \psi_{11}, \ldots, \psi_{n1};\ M_1)_{\lambda_1} \cdot \tau(\Gamma_1^{(2)}, \ldots, \Gamma_n^{(2)};\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ M_2)_{\lambda_2}$ $(\lambda_j = 1, \ldots, l_j;\ j = 1, 2;\ l_j =$ *Grad der j-ten Komponente*), *wo die* $\tau(\Gamma_1^{(j)}, \ldots, \Gamma_n^{(j)};\ \psi_{1j}, \ldots \psi_{nj};\ M_j)_{\lambda_j}$ *die Eigenwerte der Komponenten sind, liefern die Gesamtheit der Eigenwerte von* $\tau(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n;\ \psi_1, \ldots, \psi_n;\ [M_1, M_2])$; *für die Norm und die Spur gelten die Kompositionsregeln*:

---

[12]) Wegen der Reduktionsregel 1 können wir uns auf diesen Fall beschränken.

[13]) Die irreduziblen Darstellungen $\Gamma_i^{(1)}$ bzw. $\Gamma_i^{(2)}$ sind dabei die einzigen irreduziblen Bestandteile der gemäß der 1. Induktionsregel **1. 1h** durch Γ_i auf $\mathfrak{G}_i^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{G}_i^{(2)}$ induzierten Darstellungen.

$$(1.\,25)\qquad |\,\tau(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n;\ \psi_1,\ldots,\psi_n;\ [M_1,M_2])\,| = \prod_{j=1}^{2} |\,\tau(\Gamma_1^{(j)},\ldots,\Gamma_n^{(j)};\ \psi_{1j},\ldots,\psi_{nj};\ M_j)\,|^{\frac{l_1 l_2}{l_j}},$$

$$(1.\,26)\qquad \tau(\chi_1,\ldots,\chi_n;\ \psi_1,\ldots,\psi_n;\ [M_1,M_2]) = \prod_{j=1}^{2} \tau(\chi_1^{(j)},\ldots,\chi_n^{(j)};\ \psi_{1j},\ldots,\psi_{nj};\ M_j).$$

Die Reduktionsregel 2 enthält keine explizite Kompositionsvorschrift für die Eigenpolynome; die Zusammensetzung des Eigenpolynoms aus denen der Komponenten wird durch die Kompositionsregel der Eigenwerte beschrieben und geht somit aus unserer Reduktionsregel 2 hervor.

Die obige Reduktion kann sinngemäß fortgesetzt werden, falls M_1 oder M_2 wieder Paarmengen sind und die Abbildungen ψ_i in M_1 bzw. M_2 die (1. 22) entsprechenden Eigenschaften haben. Die angegebene Reduktion braucht keineswegs auf Matrizen von niedrigerer Zeilenzahl zu führen (z. B. wenn jede Darstellung Γ_i einen Faktor 1. Grades abspaltet oder stets $\mathfrak{G}_i^{(2)} = \mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{G}_i^{(2)} \cong \mathfrak{G}_i$ ist); wenn jedoch $M = [M_1, M_2]$ eine echte Paarbildung ist, führt unsere Reduktion auf irreduzible n-fache Darstellungssummen, deren Summationsbereich weniger Elemente enthält.

§ 2. Gaußsche Summen in endlichen Ringen.

2. 1. Die Additivgruppe und die Multiplikativgruppe eines endlichen Ringes.

Es sei R ein *endlicher i. a. nichtkommutativer Ring mit Einselement* 1, d. h. in R sollen alle Ringpostulate eventuell mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation gelten und R enthalte nur endlich viele verschiedene Elemente, deren Anzahl wir mit $A(R)$ bezeichnen. Das *Zentrum Z von R*, d. h. die Gesamtheit der $\zeta \in R$ mit $\zeta\xi = \xi\zeta$ für alle $\xi \in R$, ist ein kommutativer Unterring von R mit dem gleichen Einselement 1.

Da die Addition in R kommutativ ist, bilden die Elemente ξ von R bezüglich der Addition eine endliche abelsche Gruppe, die *Additivgruppe $\mathfrak{R}$ von R*. Die maximale Elementordnung von $\mathfrak{R}$ (d. h. den Exponenten von $\mathfrak{R}$) nennen wir die *Charakteristik von R*, in Zeichen $Char(R)$; sie ist eine natürliche Zahl und stimmt, da R ein Einselement besitzt, mit der additiven Elementordnung von 1 überein. Da $\mathfrak{R}$ eine abelsche Gruppe ist, sind die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{R}$ alle vom Grad 1; sie stimmen also mit ihren Charakteren überein. Wir nennen diese irreduziblen Darstellungen $e[\xi]$ von $\mathfrak{R}$, die komplexwertige Funktionen der Ringelemente (der Elemente von $\mathfrak{R}$) sind und der Funktionalgleichung

$$(2.\,1)\qquad e[\xi_1]\cdot e[\xi_2] = e[\xi_1+\xi_2] \text{ für } \xi_1,\xi_2 \in R$$

genügen, *Additivcharaktere $e[\xi]$ von R*; ihre Werte sind Einheitswurzeln, d. h. ganzalgebraische Zahlen, und die Gesamtheit der $e[\xi]$ bildet die zu $\mathfrak{R}$ isomorphe Charaktergruppe $E_{\mathfrak{R}}$.

Ein Element ξ eines Ringes R heißt *rechter* (*linker*) *Nullteiler*, wenn ein Element $\eta \neq 0$ in R existiert, so daß $\eta\xi = 0$ ($\xi\eta = 0$) ist; Elemente $\xi \in R$, die sowohl rechte als auch linke Nullteiler sind, nennen wir *zweiseitige Nullteiler* oder schlechthin *Nullteiler*. Ein Element $\xi \in R$, das kein rechter (linker, zweiseitiger) Nullteiler ist, werde *rechter* (*linker, zweiseitiger*) *Nichtnullteiler* von R genannt.

Wir vermerken ein hinreichendes Kriterium dafür, daß ein Element ξ eines Ringes mit Einselement ein rechter bzw. linker Nichtnullteiler ist:

(2. 2) Existiert ein $\zeta \in {}^{l}R$ os, daß $\xi\zeta = 1\,(\zeta\xi = 1)$ ist, dann ist ξ ein rechter (linker) Nichtnullteiler in R[14]).

Lemma 1. *In einem endlichen Ring R mit Einselement 1 sind alle Nullteiler zweiseitige Nullteiler und die Nichtnullteiler bilden eine multiplikative Gruppe $\mathfrak{M}_R$, die Multiplikativgruppe oder Einheitengruppe von R. Diese Gruppe $\mathfrak{M}_R$ enthält als abelsche Untergruppe die Multiplikativgruppe $\mathfrak{M}_Z = \mathfrak{M}_R \frown Z$ des Zentrums Z von R.*

Beweis. Ist $\xi \in R$ rechter Nichtnullteiler, dann sind die Produkte $\zeta_\nu\xi$, wenn ζ_ν alle Elemente von R durchläuft, alle verschieden (denn aus $\zeta_\nu\xi = \zeta_\mu\xi$ folgte $(\zeta_\nu - \zeta_\mu)\,\xi = 0$ mit $\zeta_\nu - \zeta_\mu \neq 0$) und liefern alle Elemente aus R; folglich existiert ein Element $\zeta^* \in R$, so daß $\zeta^*\xi = 1$ ist, und ξ ist nach (2. 2) auch linker Nichtnullteiler. Die umgekehrte Richtung folgt analog. In R ist somit jeder Nichtnullteiler zweiseitiger Nichtnullteiler; die Gesamtheit dieser Nichtnullteiler bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_R$.

Wegen (2. 2) ist das Produkt zweier Nichtnullteiler wieder ein solcher; die Multiplikation ist assoziativ und in $\mathfrak{M}_R$ existiert genau ein Einselement, nämlich $1 \in R$. Ferner existiert zu jedem $\xi \in \mathfrak{M}_R$ genau ein $\eta_r \in \mathfrak{M}_R$ mit $\xi\eta_r = 1$ (mit $\eta \in \mathfrak{M}_R$ durchläuft auch $\eta\xi$ alle Elemente von $\mathfrak{M}_R$); da $\eta_r\xi\,\eta_r = \eta_r$ und $1\,\eta_r = \eta_r$, also $(\eta_r\xi - 1)\,\eta_r = 0$ ist, ist auch $\eta_r\xi = 1$, d. h. $\eta_r = \xi^{-1}$ und $\mathfrak{M}_R$ ist eine multiplikative Gruppe. Der Durchschnitt $\mathfrak{M}_R \frown Z$ ist einerseits Untergruppe von $\mathfrak{M}_R$ und andererseits Untergruppe der Multiplikativgruppe $\mathfrak{M}_Z$ von Z (Gesamtheit der Nichtnullteiler von Z); da jeder Nichtnullteiler von Z auch Nichtnullteiler in R ist (beachte (2. 2)), ist $\mathfrak{M}_Z = \mathfrak{M}_R \frown Z$, womit Lemma 1 bewiesen ist.

Eine Darstellung der Multiplikativgruppe $\mathfrak{M}_R$ von R durch l-reihige quadratische komplexzahlige Matrizen $\Gamma(\xi) = (x_{ik})$ nennen wir eine *Multiplikativdarstellung l-ten Grades von R*. Die Darstellungsmatrizen sind also Funktionen der Nichtnullteiler ξ von R, die der Funktionalgleichung

$$\Gamma(\xi_1)\,\Gamma(\xi_2) = \Gamma(\xi_1\xi_2) \quad \text{für} \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{M}_R \tag{2. 3}$$

genügen.

2. 2. Gaußsche Summen in endlichen Ringen und ihre Invarianten.

Gaußsche Summen in endlichen Ringen R mit Einselement sind spezielle 2-fache Darstellungssummen. Die Menge M ist hier die Gesamtheit $\mathfrak{M}_R$ der Nichtnullteiler von R und die Gruppen $\mathfrak{G}_i$ sind die Additivgruppe $\mathfrak{R}$ und die Multiplikativgruppe $\mathfrak{M}_R$ von R. Als Abbildungen ψ_1 und ψ_2 werden die natürlichen Zuordnungen gewählt, die dem Nichtnullteiler $\xi \in R$ das Gruppenelement ξ von $\mathfrak{R}$ bzw. von $\mathfrak{M}_R$ zuordnen; sie werden deshalb im Argument der Gaußschen Summen nicht mehr besonders vermerkt. Die Gaußschen Summen selbst werden dann, wie folgt, als 2-fache Darstellungssummen erklärt (entsprechend ihre Invarianten):

Definition 1′. *Die 2-fache Darstellungssumme*

$$\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi)\, e[\xi], \tag{2. 4}$$

wobei $\Gamma(\xi)$ eine Multiplikativdarstellung, $e[\xi]$ ein Additivcharakter und $\mathfrak{M}_R$ die Gesamtheit der Nichtnullteiler eines endlichen Ringes R mit Einselement 1 ist, nennen wir eine allgemeine Gaußsche Summe in R. Ist speziell $\Gamma(\xi)$ eine irreduzible Multiplikativdarstellung, so heiße $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ eine irreduzible Gaußsche Summe.

---

[14]) Gäbe es ein $\eta \neq 0$ aus R mit $\eta\xi = 0$ $(\xi\eta = 0)$, so folgte der Widerspruch $\eta\xi\zeta = \eta 1 = 0$ $(\zeta\xi\eta = 1\,\eta = 0)$.

Definition 2'. *Das charakteristische Polynom*

$$(2.5)\qquad F(t;\Gamma,e;\mathfrak{M}_R) = |\, t\cdot E_{l(\Gamma)} - \tau(\Gamma,e;\mathfrak{M}_R)\,| \quad (l(\Gamma)\ \textit{Grad von}\ \Gamma)$$

nennen wir das Eigenpolynom (oder die Invariante 1. Art), seine $l(\Gamma)$ Nullstellen $\tau(\Gamma,e;\mathfrak{M}_R)_\lambda$ $(\lambda = 1,\ldots,l(\Gamma))$ die Eigenwerte, die Determinante $|\,\tau(\Gamma,e;\mathfrak{M}_R)\,|$ die Norm oder Invariante 2. Art und die Matrizenspur

$$(2.6)\qquad \mathrm{Sp}\,(\tau(\Gamma,e;\mathfrak{M}_R)) = \tau(\chi,e;\mathfrak{M}_R) = \sum_{\xi\in\mathfrak{M}_R}\chi(\xi)\,e[\xi]$$

die Spur oder Invariante 3. Art der Gaußschen Summe $\tau(\Gamma,e;\mathfrak{M}_R)$.

Die Tatsache, daß in obiger Definition nur Darstellungen der Additivgruppe vom 1. Grad, d. h. Additivcharaktere, eingehen, bedeutet keinerlei Einschränkung, da die Reduktionsregel 1 auf die Gaußschen Summen übertragbar ist und eine allgemeinere Definition nur eine triviale Zusammensetzung bedeuten würde. Wir formulieren die Ergebnisse dieser Reduktionsregel sowie die von Satz 1 für den Spezialfall der Gaußschen Summen gesondert in

Satz 1'. *Die Eigenwerte, die Norm und die Spur der allgemeinen Gaußschen Summen $\tau(\Gamma,e;\mathfrak{M}_R)$ in endlichen Ringen mit Einselement sind ganzalgebraische Zahlen, ihre Eigenpolynome haben ganzalgebraische Koeffizienten; diese Zahlen hängen nur von der Darstellungsklasse $\{\Gamma\}$ der Multiplikativgruppe $\mathfrak{M}_R$ und dem Additivcharakter $e[\xi]$ ab. Sie bestimmen sich aus den Invarianten irreduzibler Gaußscher Summen gemäß*

$$(2.7)\qquad \begin{cases} F(t;\Gamma,e;\mathfrak{M}_R) = \prod\limits_{\sigma=1}^{s} F(t;\Gamma_\sigma,e;\mathfrak{M}_R)^{g_\sigma}, \\ |\,\tau(\Gamma,e;\mathfrak{M}_R)\,| = \prod\limits_{\sigma=1}^{s} |\,\tau(\Gamma_\sigma,e;\mathfrak{M}_R)\,|^{g_\sigma}, \\ \tau(\chi,e;\mathfrak{M}_R) = \sum\limits_{\sigma=1}^{s} g_\sigma\,\tau(\chi_\sigma,e;\mathfrak{M}_R), \end{cases}$$

falls $\Gamma \sim g_1\Gamma_1 \oplus\cdots\oplus g_s\Gamma_s$ (Γ_σ absolut-irreduzibel), und die Eigenwerte von $\tau(\Gamma,e;\mathfrak{M}_R)$ bestehen aus der Gesamtheit der $\tau(\Gamma_\sigma,e;\mathfrak{M}_R)_{\lambda_\sigma}$ $(\lambda_\sigma = 1,\ldots,l(\Gamma_\sigma))$, jeden mit der Vielfachheit g_σ gezählt.

2. 3. Komponentenzerlegung endlicher Ringe mit Einselement.

Das Zentrum Z eines endlichen Ringes R mit Einselement 1 ist ein einartiger Nullteilerring mit Einselement und besitzt somit eine eindeutige direkte Summenzerlegung in (kommutative) primäre Nullteilerringe Z_i mit Einselementen 1_i (vgl. hierzu [7c]). Ist $1 = 1_1 + \cdots + 1_n$ die zugehörige Zerlegung des Einselementes von R (und von Z) in orthogonale Zentrumsidempotente ($1_i 1_k = 0$ für $i \neq k$, $1_i^2 = 1_i$), so ist

$$(2.8)\qquad R = R_1 \oplus\cdots\oplus R_n \ \text{mit}\ R_i = R1_i = 1_i R \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

eine eindeutige Zerlegung von R in eine direkte Summe von *Komponentenringen* R_i, d. h. von Ringen R_i mit Einselementen 1_i und primären Zentren Z_i. Verschiedene Komponentenringe von R annullieren sich gegenseitig wegen der Orthogonalität der Zentrumsidempotente, d. h. es ist $R_i R_k = 0$, falls $i \neq k$ ist. Ferner ist ein Komponentenring R_i nicht in eine direkte Summe echter Teilringe zerlegbar, d. h. die Zerlegung (2. 8) von R ist vollständig (vgl. [7c], S. 355).

Wegen (2. 8) ist die Additivgruppe $\mathfrak{R}$ von R direkte Summe der Additivgruppen $\mathfrak{R}_i$ der Komponentenringe R_i

$$(2.9)\qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus\cdots\oplus \mathfrak{R}_n;$$

aus der zugehörigen Komponentenzerlegung der Elemente ξ von R gemäß

$$\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n \quad \text{mit} \quad \xi_i = 1_i \xi \in R_i \tag{2.10}$$

folgt, daß $\xi \in R$ genau dann Nichtnullteiler in R ist, wenn jede Komponente $\xi_i \in R_i$ Nichtnullteiler in dem zugehörigen Komponentenring R_i ist[15]).

Speziell sind also die Elemente

$$\xi_i^* = \sum_{k \neq i} 1_k + \xi_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.11}$$

genau dann aus $\mathfrak{M}_R$, falls ξ_i Nichtnullteiler in R_i, d. h. aus $\mathfrak{M}_{R_i}$ ist; sie bilden eine Untergruppe $\mathfrak{M}_{R_i}^*$ von $\mathfrak{M}_R$ und bei der Zuordnung

$$\sigma_i(\xi_i^*) = \xi_i \quad \text{mit} \quad \xi_i \in \mathfrak{M}_{R_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.12}$$

wird jeweils die Gruppe $\mathfrak{M}_{R_i}^*$ isomorph auf $\mathfrak{M}_{R_i}$ abgebildet. Beachtet man, daß Elemente aus verschiedenen $\mathfrak{M}_{R_i}^*$ miteinander vertauschbar sind, daß

$$\xi = \xi_1^* \cdots \xi_n^* = \xi_1 + \cdots + \xi_n \qquad (\xi \in \mathfrak{M}_R,\ \xi_i \text{ gemäß } (2.11)) \tag{2.13}$$

und daß verschiedene $\mathfrak{M}_{R_i}^*$ nur die Eins gemeinsam haben, so folgt

$$\mathfrak{M}_R = \mathfrak{M}_{R_1}^* \times \cdots \times \mathfrak{M}_{R_n}^* \quad \text{mit} \quad \mathfrak{M}_{R_i}^* \cong \mathfrak{M}_{R_i}. \tag{2.14}$$

Ferner ist der Durchschnitt von $\mathfrak{M}_{R_i}$ und Z_i die Multiplikativgruppe dieser Zentrumskomponente, d. h. $\mathfrak{M}_{R_i} \cap Z_i = \mathfrak{M}_{Z_i}$, und unter Beachtung von (2. 12) und (2. 14) gilt

$$\mathfrak{M}_Z = \mathfrak{M}_{Z_1}^* \times \cdots \times \mathfrak{M}_{Z_n}^*, \quad \text{wobei } \mathfrak{M}_{Z_i}^* \cong \mathfrak{M}_{Z_i} \text{ ist.}$$

Zusammen erhalten wir das

Lemma 2. *Ein endlicher Ring R mit Einselement 1 ist entsprechend der direkten Summenzerlegung seines Zentrums Z in primäre Ringe Z_i vollständig und eindeutig in eine direkte Summe von Komponentenringen R_i zerlegbar. Diese direkte Summenzerlegung von R induziert eine direkte Produktzerlegung der Multiplikativgruppe $\mathfrak{M}_R$ von R in Gruppen $\mathfrak{M}_{R_i}^*$, die isomorph zu den Multiplikativgruppen $\mathfrak{M}_{R_i}$ der Komponentenringe R_i sind; jede Gruppe $\mathfrak{M}_{R_i}$ enthält als abelsche Untergruppe die Multiplikativgruppe $\mathfrak{M}_{Z_i}$ der zugehörigen Zentrumskomponente Z_i.*

2. 4. Die Komponentenzerlegung der irreduziblen Gaußschen Summen.

Die Komponentenzerlegung der endlichen Ringe hat entsprechend der Reduktionsregel 2 nachstehende Komponentenzerlegung der irreduziblen Gaußschen Summen zur Folge.

Die Menge $\mathfrak{M}_R$ der Nichtnullteiler von R besitzt gemäß (2. 10) die Komponentenzerlegung $\mathfrak{M}_R = [\mathfrak{M}_{R_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{R_n}]$. Die natürliche Abbildung der $\xi \in \mathfrak{M}_R$ in die Additivgruppe $\mathfrak{R}$ erfüllt wegen (2. 10) die Forderung (1. 22) und bedingt unter Beachtung von **1. 1 h** folgende Aufspaltung des Additivcharakters $e[\xi]$ in induzierte Komponenten (entsprechend der aus (2. 9) folgenden direkten Produktzerlegung der Charaktergruppe $E_{\mathfrak{R}}$):

$$e[\xi] = e[\xi_1 + \cdots + \xi_n] = \prod_{i=1}^{n} e^{(i)}[\xi_i] \tag{2.15}$$

$$\text{mit } e^{(i)}[\xi_i] = e[\xi_i] \text{ für } \xi_i \in R_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Bei der natürlichen Abbildung der Nichtnullteiler ξ von R auf die Multiplikativgruppe des Ringes entsprechen wegen (2. 10), (2. 11) und (2. 13) den Komponenten ξ_i (eineindeutig) die Elemente ξ_i^* der Multiplikativgruppe $\mathfrak{M}_R$, d. h. (1. 22) ist erfüllt. Wegen

---

[15]) Sind alle ξ_i Nichtnullteiler in den R_i, so ist $\xi^{-1} = \xi_1^{-1} + \cdots + \xi_n^{-1}$ das inverse Element zu ξ in R; ist ein ξ_i Nullteiler in R_i, so gibt es ein η_i aus R_i mit $\xi_i \eta_i = 0$ und es ist auch $\xi \eta_i = (\xi_1 + \cdots + \xi_n)\, \eta_i = 0$, also ist ξ Nullteiler in R.

der Isomorphie von $\mathfrak{M}_{R_i}^*$ und $\mathfrak{M}_R$ (vgl. (2. 12)), **1. 1a**, **1. 1h** und (1. 6) kann die Multiplikativdarstellung Γ von $\mathfrak{M}_R$ äquivalent durch induzierte Darstellungen $\Gamma^{(i)}$ der $\mathfrak{M}_{R_i}$ gemäß

$$(2.\,16)\qquad \Gamma(\xi) \sim \Gamma^{(1)}(\xi_1) \times \cdots \times \Gamma^{(n)}(\xi_n) \text{ mit } \Gamma^{(i)}(\xi_i) = \Gamma^{(i)*}(\xi_i^*),$$

wobei $\Gamma^{(i)*}(\xi_i^*)$ der irreduzible Bestandteil von Γ auf $\mathfrak{M}_{R_i}^*$ ist, dargestellt werden.

Somit folgt aus (1. 24) eine Kroneckerproduktzerlegung der irreduziblen Gaußschen Summe $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ in *induzierte Komponenten*, nämlich in irreduzible Gaußsche Summen $\tau(\Gamma^{(i)}, e^{(i)}; \mathfrak{M}_{R_i})$ in den Komponentenringen R_i von R, bei denen jeweils über alle $\xi_i \in \mathfrak{M}_{R_i}$ summiert wird. Analog zur Reduktionsregel 2 gilt für die Invarianten der Gaußschen Summe der

Satz 2. *Gemäß der eindeutigen Zerlegung eines endlichen Ringes R mit Einselement in eine direkte Summe von Komponentenringen R_i ist jede irreduzible Gaußsche Summe $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ äquivalent dem Kroneckerprodukt der in den Komponentenringen induzierten irreduziblen Gaußschen Summen $\tau(\Gamma^{(i)}, e^{(i)}; \mathfrak{M}_{R_i})$; hierbei ist $\Gamma^{(i)}$ gemäß* (2. 16) *und $e^{(i)}$ gemäß* (2. 15) *bestimmt. Die Eigenwerte von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ sind die $l(\Gamma^{(1)}) \cdots l(\Gamma^{(n)})$ Produkte $\tau(\Gamma^{(1)}, e^{(1)}; \mathfrak{M}_{R_1})_{\lambda_1} \cdots \tau(\Gamma^{(n)}, e^{(n)}; \mathfrak{M}_{R_n})_{\lambda_n}$ $(\lambda_i = 1, \ldots, l(\Gamma^{(i)});\ i = 1, \ldots, n)$ wobei die $\tau(\Gamma^{(i)}, e^{(i)}; \mathfrak{M}_{R_i})_{\lambda_i}$ alle Eigenwerte der induzierten Komponenten $\tau(\Gamma^{(i)}, e^{(i)}; \mathfrak{M}_{R_i})$ durchlaufen. Norm und Spur setzen sich folgendermaßen aus denen der induzierten Komponenten zusammen:*

$$(2.\,17)\qquad |\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)| = \prod_{i=1}^{n} |\tau(\Gamma^{(i)}, e^{(i)}; \mathfrak{M}_{R_i})|^{\frac{l(\Gamma^{(1)})\cdots l(\Gamma^{(n)})}{l(\Gamma^{(i)})}},$$

$$(2.\,18)\qquad \tau(\chi, e; \mathfrak{M}_R) = \prod_{i=1}^{n} \tau(\chi^{(i)}, e^{(i)}; \mathfrak{M}_{R_i}).$$

2. 5. Ergänzende Bemerkungen.

Wie schon bei den n-fachen Darstellungssummen kann auch hier die Komponentenzerlegung der Eigenpolynome nur über die Eigenwerte beschrieben werden[16]). Ebenso ist eine Komponentenzerlegung einer nicht irreduziblen Gaußschen Summe i. a. direkt nicht möglich, sondern nur auf dem Umweg über Satz 1′.

Die Einführung von Gaußschen Summen in endlichen Ringen ist insofern nicht an die Existenz eines Einselementes gebunden, als es sehr wohl Ringe ohne 1 geben kann, die eine multiplikative Gruppe enthalten. Dann kann jedoch sehr leicht ein Unterring mit Einselement angegeben werden. Eine solche nach einer der unseren ähnlichen Vorschrift gebildete „Gaußsche Summe" soll jedoch nur dann so genannt werden, wenn die zugrunde gelegte Multiplikativgruppe in einem geeigneten Unterring die volle Nichtnullteilergruppe ist.

Da es auch in einem endlichen Ring mit Einselement multiplikative Gruppen von Nullteilern geben kann, weisen wir nochmals darauf hin, daß hier nur die volle Nichtnullteilergruppe mit Multiplikativgruppe oder Einheitengruppe bezeichnet werden soll. Die Nichtnullteiler werden wir auch die *Einheiten* von R nennen.

§ 3. Die idealtheoretische Struktur von $e[\xi]$ bzw. $\Gamma(\xi)$ und idealtheoretische Hilfsbetrachtungen.

3. 1. Die Erklärungsmoduln eines Additivcharakters.

Eine wesentliche Klassifikation der Gaußschen Summen fußt auf der idealtheoretischen Struktur ihrer Bestimmungsstücke $e[\xi]$ bzw. $\Gamma(\xi)$, d. h. auf den Begriffen Erklärungsmodul und Führer. Die idealtheoretische Struktur der Additivcharaktere $e[\xi]$

[16]) Auf diese Komposition der Eigenpolynome kommen wir in § 6, **6. 3d** noch einmal zurück.

endlicher Ringe R mit Einselement haben wir bereits in anderem Zusammenhang (vgl. [7c], §§ 3—5) untersucht und können uns hier deshalb auf eine kurze Zusammenstellung der Begriffsbildungen und Ergebnisse beschränken.

Ist $e[\xi]$ ein Additivcharakter von R, so sind bei beliebigen Parameterelementen α bzw. β aus R auch

$$(3.1) \qquad {}_\alpha e[\xi] = e[\alpha\xi] \quad \text{bzw.} \quad e_\beta[\xi] = e[\xi\beta]$$

Additivcharaktere von R und die Zuordnungen

$$(3.2.) \qquad \Phi_e: \ \alpha \longrightarrow {}_\alpha e[\xi] \quad \text{bzw.} \quad \Psi_e: \ \beta \longrightarrow e_\beta[\xi]$$

sind homomorphe Abbildungen der Additivgruppe $\mathfrak{R}$ von R in ihre Charaktergruppe $E_{\mathfrak{R}}$. Der Kern $\mathfrak{r}_e$ des Homomorphismus Φ_e ist das umfassendste Rechtsideal von R, für dessen Elemente η stets $e[\eta] = 1$ ist, und der Kern $\mathfrak{l}_e$ des Homomorphismus Ψ_e ist das umfassendste Linksideal von R, für dessen Elemente ζ stets $e[\zeta] = 1$ ist; es gilt stets die Anzahlregel[17])

$$(3.3) \qquad A_R(\mathfrak{r}_e) = A_R(\mathfrak{l}_e).$$

Das umfassendste zweiseitige Ideal $\mathfrak{b}_e$, für dessen Elemente γ stets $e[\gamma] = 1$ ist, ist zugleich das maximale in $\mathfrak{r}_e$ bzw. $\mathfrak{l}_e$ enthaltene zweiseitige Ideal.

Definition 3. *Das Rechtsideal $\mathfrak{r}_e$ werde der (maximale) rechte Erklärungsmodul, das Linksideal $\mathfrak{l}_e$ der (maximale) linke Erklärungsmodul und das zweiseitige Ideal $\mathfrak{b}_e$ der (maximale) zweiseitige Erklärungsmodul des Additivcharakters $e[\xi]$ genannt. Ist $\mathfrak{r}_e = \mathfrak{l}_e = \mathfrak{b}_e$, so heiße $e[\xi]$ ein symmetrischer Additivcharakter*[18]) *und ist sogar $\mathfrak{r}_e = \mathfrak{l}_e = \mathfrak{b}_e = (0)$, so heiße $e[\xi]$ ein echter Additivcharakter von R. Ist $e[\xi]$ symmetrisch bzw. echt, so werde die Gaußsche Summe $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ eine symmetrische bzw. echte Gaußsche Summe genannt. Ist nur $\mathfrak{b}_e = (0)$, so heiße $e[\xi]$ quasiecht.*

Bei der Zerlegung (2.8) von R in Komponentenringe R_i und der entsprechenden Zerlegung (2.15) eines Additivcharakters $e[\xi]$ in induzierte Komponenten $e^{(i)}[\xi_i]$ gilt für die Erklärungsmoduln die Zerlegung

$$(3.4) \qquad \mathfrak{r}_e = \mathfrak{r}_{e^{(1)}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{r}_{e^{(n)}} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{l}_e = \mathfrak{l}_{e^{(1)}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{l}_{e^{(n)}}$$
$$\text{bzw.} \quad \mathfrak{b}_e = \mathfrak{b}_{e^{(1)}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{b}_{e^{(n)}},$$

wobei $\mathfrak{r}_{e^{(i)}}$ bzw. $\mathfrak{l}_{e^{(i)}}$ bzw. $\mathfrak{b}_{e^{(i)}}$ die Erklärungsmoduln von $e^{(i)}[\xi_i]$ in R_i sind[19]); folglich ist $e[\xi]$ genau dann symmetrisch bzw. echt, wenn diese Aussage für alle $e^{(i)}[\xi_i]$ zutrifft.

Existiert in R ein echter Additivcharakter, so wird R ein *dualer Ring*[20]) genannt, denn zu jedem Modul $\mathfrak{g}$ in R (additive Gruppe) existiert ein vorderer bzgl. $e[\xi]$ dualer Modul ${}_e\bar{\mathfrak{g}}$ von $\mathfrak{g}$ (Gesamtheit der $\alpha \in R$ mit ${}_\alpha e[\gamma] = 1$ für alle $\gamma \in \mathfrak{g}$) und entsprechend ein hinterer bzgl. $e[\xi]$ dualer Modul $\bar{\mathfrak{g}}_e$ von $\mathfrak{g}$ mit der Anzahlregel

$$(3.5) \qquad A_R({}_e\bar{\mathfrak{g}}) = A_R(\bar{\mathfrak{g}}_e) = \frac{A(R)}{A_R(\mathfrak{g})}.$$

Speziell ist der vordere duale Modul eines Rechtsideals $\mathfrak{r}$ gleich dem linken Annullator $\mathfrak{r}_l$ (Gesamtheit der $\eta \in R$ mit $\eta\mathfrak{r} = 0$), d. h. es ist ${}_e\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}_l$ und unabhängig von $e[\xi]$, und der hintere duale Modul eines Linksideals $\mathfrak{l}$ ist gleich dem rechten Annullator $\mathfrak{l}_r$, d. h. $\bar{\mathfrak{l}}_e = \mathfrak{l}_r$. Hieraus folgt für die Annullatorbildung in dualen Ringen die Gültigkeit der Regel

$$(3.6) \qquad (\mathfrak{r}_l)_r = \mathfrak{r} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{l}_r)_l = \mathfrak{l},$$

d. h. daß R ein *I-regulärer Ring* ist. Der Restklassenring nach dem Erklärungsmodul $\mathfrak{r}_e = \mathfrak{l}_e$ eines jeden symmetrischen Additivcharakters $e[\xi]$ ist dual, also auch I-regulär, und somit ist dieser Erklärungsmodul ein reguläres zweiseitiges Ideal.

Die Umkehrung hiervon, nämlich daß aus der I-Regularität eines endlichen Ringes R die Existenz eines echten Additivcharakters folgt, gilt nicht allgemein. Falls jedoch der endliche I-reguläre Ring R zugleich *fastprimär* ist[21]), d. h. jeder seiner Komponentenringe ein primärer Ring ist, so existiert in R stets ein echter Additivcharakter; dieser Fall ist für arithmetische Anwendungen besonders wichtig.

---

[17]) Mit $A_R(\mathfrak{g})$ sei allgemein die Anzahl der Elemente von R bezeichnet, die in der Untergruppe $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{R}$ liegen; $A(R)$ ist die Elementanzahl von R.

[18]) In einem kommutativen Ring R ist natürlich jeder Additivcharakter symmetrisch.

[19]) Vgl. [7c], § 4, 1.

[20]) Diese Ringe sind ein Analogon zu den Frobeniusschen Algebren (vgl. [7c]).

[21]) Der Begriff „fastprimär" ist eine echte Verschärfung des Begriffes „halbprimär"; ein kommutativer endlicher Ring ist stets fastprimär.

Zu jedem Rechtsideal $\mathfrak{r}$[22]) von R gibt es ein maximales zweiseitiges in $\mathfrak{r}$ enthaltenes Ideal $\mathfrak{b}(\mathfrak{r})$ und ein minimales zweiseitiges $\mathfrak{r}$ enthaltendes Ideal $\mathfrak{m}(\mathfrak{r})$; $\mathfrak{b}(\mathfrak{r})$ und $\mathfrak{m}(\mathfrak{r})$ sind durch $\mathfrak{r}$ eindeutig bestimmt[23]). Mit $\mathfrak{r}$ ist auch $\alpha\mathfrak{r}$ (für jedes $\alpha \in R$) ein in $\mathfrak{m}(\mathfrak{r})$ enthaltenes Rechtsideal; da $\sum_{\alpha \in R} \alpha\mathfrak{r} \geqq \mathfrak{r}$ ein zweiseitiges Ideal ist, folgt also

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{r}) = \sum_{\alpha \in R} \alpha\mathfrak{r} \text{ bzw. } \mathfrak{m}(\mathfrak{l}) = \sum_{\beta \in R} \mathfrak{l}\beta. \tag{3. 7}$$

Analog ist mit $\mathfrak{r}$ auch $(\mathfrak{r} : \alpha)_r$[24]) (für jedes $\alpha \in R$) ein Rechtsideal, das $\mathfrak{b}(\mathfrak{r})$ enthält; da $\bigcap_{\alpha \in R} (\mathfrak{r} : \alpha)_r \leqq \mathfrak{r}$ ein zweiseitiges Ideal ist, folgt entsprechend

$$\mathfrak{b}(\mathfrak{r}) = \bigcap_{\alpha \in R} (\mathfrak{r} : \alpha)_r \text{ bzw. } \mathfrak{b}(\mathfrak{l}) = \bigcap_{\beta \in R} (\mathfrak{l} : \beta)_l. \tag{3. 8}$$

Ist α bzw. β ein Nichtnullteiler in R, so gilt zusätzlich

$$(\mathfrak{r} : \alpha)_r = \alpha^{-1}\mathfrak{r} \text{ bzw. } (\mathfrak{l} : \beta)_l = \mathfrak{l}\beta^{-1}. \tag{3. 9}$$

Es ist also $\mathfrak{b}_e = \mathfrak{b}(\mathfrak{r}_e) = \mathfrak{b}(\mathfrak{l}_e)$ für jeden Additivcharakter $e[\xi]$.

Beim Übergang von $e[\xi]$ zu einem Additivcharakter der Form ${}_\alpha e[\xi]$ bzw. $e_\beta[\xi]$ gelten für die zugehörigen Erklärungsmoduln die Substitutionsregeln

$$\mathfrak{r}_{{}_\alpha e} = (\mathfrak{r}_e : \alpha)_r \text{ bzw. } \mathfrak{l}_{e_\beta} = (\mathfrak{l}_e : \beta)_l \tag{3. 10}$$

und

$$\mathfrak{l}_{{}_\alpha e} \geqq \mathfrak{l}_e \qquad \text{bzw. } \mathfrak{r}_{e_\beta} \geqq \mathfrak{r}_e, \tag{3. 11}$$

und wenn α bzw. β Nichtnullteiler sind, gilt in (3. 11) sogar die Gleichheit[25]).

Falls α bzw. β Nichtnullteiler sind, so ist wegen (3. 9) und (3. 10) $\mathfrak{b}_e = \mathfrak{b}_{{}_\alpha e}$ bzw. $\mathfrak{b}_e = \mathfrak{b}_{e_\beta}$. — Ist speziell $e[\xi]$ ein echter Additivcharakter und sind α bzw. β Nullteiler, so sind ${}_\alpha e[\xi]$ und $e_\beta[\xi]$ keine echten Additivcharaktere mehr; diese Aussagen können sinngemäß auf symmetrische Additionscharaktere übertragen werden (durch Restklassenbildung mod $\mathfrak{b}_e$). — Zusammen erhalten wir

Lemma 1. *Ist $e[\xi]$ ein Additivcharakter von R, so bestimmen sich bei beliebigem α bzw. β aus R die Erklärungsmoduln von ${}_\alpha e[\xi]$ bzw. $e_\beta[\xi]$ gemäß* (3. 10), (3. 11) *und enthalten alle das zweiseitige Ideal $\mathfrak{b}_e = \mathfrak{b}(\mathfrak{r}_e) = \mathfrak{b}(\mathfrak{l}_e)$; ist α bzw. β sogar Nichtnullteiler in R, so folgt $\mathfrak{b}_e = \mathfrak{b}_{{}_\alpha e} = \mathfrak{b}_{e_\beta}$. Ist $e[\xi]$ ein symmetrischer Additivcharakter, so gilt $\mathfrak{b}_e = \mathfrak{b}_{{}_\alpha e} = \mathfrak{r}_{{}_\alpha e} = \mathfrak{b}_{e_\beta} = \mathfrak{l}_{e_\beta}$ dann und nur dann, wenn α bzw. β Nichtnullteiler sind.*

Zur Vereinfachung der idealtheoretischen Strukturuntersuchung der Multiplikativdarstellungen ist es zweckmäßig, folgende Verschärfung der obigen Formel (3. 7) für die betrachteten Ringe zu postulieren:

(M). *In R gelte für alle Rechtsideale $\mathfrak{r}$ und alle Linksideale $\mathfrak{l}$*

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{r}) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \xi\mathfrak{r} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{m}(\mathfrak{l}) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \mathfrak{l}\xi.$$

In **3. 3** wird anschließend gezeigt werden, daß diese Forderung in fast allen endlichen Ringen erfüllt ist, speziell aber in allen Ringtypen, die von arithmetischem Interesse sind.

---

[22]) Für Linksideale $\mathfrak{l}$ verlaufen alle Schlüsse völlig analog.

[23]) Es kann natürlich in R noch zweiseitige Ideale geben, die zwischen $\mathfrak{m}(\mathfrak{r})$ und $\mathfrak{b}(\mathfrak{r})$ liegen.

[24]) Es bezeichne für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ und eine Elementmenge $\mathfrak{g}$ von R

$(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})_r$ die Gesamtheit der $\xi \in R$ mit $\gamma\xi \in \mathfrak{a}$ für alle $\gamma \in \mathfrak{g}$,

$(\mathfrak{a} : \mathfrak{g})_l$ die Gesamtheit der $\xi \in R$ mit $\xi\gamma \in \mathfrak{a}$ für alle $\gamma \in \mathfrak{g}$.

[25]) Die Charaktere ${}_\alpha e[\xi]$ bzw. $e_\beta[\xi]$ sind nach den angegebenen Idealen erklärbar; aus der Anzahlregel (3. 3), (3. 9) und (3. 10) folgt dann die zusätzliche Aussage.

3. 2. Die einem Ideal $\mathfrak{a}$ zugeordnete Einheitengruppe $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ und der Führer einer Multiplikativdarstellung $\Gamma(\xi)$.

Die idealtheoretische Struktur der Multiplikativdarstellungen $\Gamma(\xi)$ eines endlichen Ringes R mit Einselement ergibt sich aus einer Vorschrift, nach der jedem ein- oder zweiseitigen Ideal $\mathfrak{a}$ von R eine eindeutig bestimmte *Einheitengruppe*, d. h. eine Untergruppe der Multiplikativgruppe $\mathfrak{M}_R$ von R zugeordnet wird. Dazu beachten wir folgendes:

Stellt man jedes Element $\xi \in R$ in der Form $\xi = 1 + \alpha$ dar, so ist ξ dann und nur dann aus $\mathfrak{M}_R$, wenn zu der „Komponente" α ein Element $\alpha^* \in R$ existiert mit

$$\alpha + \alpha^* + \alpha\alpha^* = \alpha + \alpha^* + \alpha^*\alpha = 0. \tag{3. 12}$$

Ist α die „Komponente" eines Nichtnullteilers, so heiße α ein *quasireguläres Element*[26]) von R; das zugehörige Element α^*, das dann auch wieder quasiregulär ist, heiße das *Quasiinverse* von α.

Ist $\mathfrak{g}$ eine Elementmenge von R (z. B. ein Modul oder ein Ideal), so bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_\mathfrak{g}$ die Gesamtheit der Elemente der Form $1 + \alpha$, wobei $\alpha \in \mathfrak{g}$ und quasiregulär ist.

Lemma 2. *Jedes nilpotente Element von R ist quasiregulär. Die Quasiregularität eines Elementes $\alpha \in R$ ist erstens äquivalent der Quasiregularität seiner Restklasse $\overline{\alpha}$* mod $\mathfrak{n}$ ($\mathfrak{n}$ *Radikal von R*) *im Radikalrestklassenring $\overline{R}$ und zweitens äquivalent der Quasiregularität jeder Komponente α_i von α in R_i bei der Zerlegung von R in Komponentenringe R_i. — Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R ist $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{M}_R$ und heißt die $\mathfrak{a}$ zugeordnete Einheitengruppe; ist $\mathfrak{a}$ sogar ein zweiseitiges Ideal, so ist $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{M}_R$*[27]). *Es gelten die folgenden Regeln:*

(a) *Aus $\mathfrak{r}' \leqq \mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{l}' \leqq \mathfrak{l}$ folgt $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}'} \leqq \mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}'} \leqq \mathfrak{M}_\mathfrak{l}$.*

(b) *Ist $\mathfrak{a}$ ein nilpotentes Ideal, so besteht $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ aus der Gesamtheit der Elemente $1 + \alpha$ mit $\alpha \in \mathfrak{a}$.*

(c) *Sind $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ Rechtsideale bzw. $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ Linksideale, so ist stets*

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{r}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1} \cap \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_2} \text{ bzw. } \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{l}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_1} \cap \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_2} \text{ (Gruppendurchschnitt).}$$

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1} \cdot \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_2} \text{ bzw. } \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_1} \cdot \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_2} \text{ (Kompositum der Untergruppen).}$$

(d) *Ist $\xi \in \mathfrak{M}_R$ und $\mathfrak{r}$ ein Rechtsideal bzw. $\mathfrak{l}$ ein Linksideal von R, so ist $\mathfrak{M}_{\xi\mathfrak{r}} = \xi\mathfrak{M}_\mathfrak{r}\xi^{-1}$ bzw. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}\xi} = \xi^{-1}\mathfrak{M}_\mathfrak{l}\xi$ eine zu $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{M}_\mathfrak{l}$ konjugierte Untergruppe von $\mathfrak{M}_R$.*

(e) *Ist in R die Forderung* **(M)** *erfüllt, so ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}(\mathfrak{r})} = \underset{\xi \in \mathfrak{M}_R}{\text{Kompositum}}\ \mathfrak{M}_{\xi\mathfrak{r}} = \mathfrak{N}(\mathfrak{M}_\mathfrak{r})$ bzw. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}(\mathfrak{l})} = \underset{\xi \in \mathfrak{M}_R}{\text{Kompositum}}\ \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}\xi} = \mathfrak{N}(\mathfrak{M}_\mathfrak{l})$ der der Untergruppe $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{M}_\mathfrak{l}$ zugeordnete Normalteiler.*

Beweis. Es sei $\alpha \in R$ nilpotent, d. h. $\alpha^r = 0$. Wäre $1 + \alpha$ ein Nullteiler, so gäbe es ein $\beta \neq 0$ in R mit $(1 + \alpha)\beta = 0$; hieraus folgte $\beta = -\alpha\beta = \cdots = (-1)^r \alpha^r \beta \neq 0$ im Widerspruch zur Annahme. Die Äquivalenzaussagen über Quasiregularität folgen aus der Quasiregularität der nilpotenten Elemente bzw. aus der Tatsache, daß (3. 12) sich eindeutig in Komponenten zerlegen läßt.

Die ersten Aussagen über $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ einschließlich (a) folgen aus der Definition von $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ bzw. der Idealeigenschaft von $\mathfrak{a}$, (b) folgt aus der Quasiregularität der nilpotenten Elemente. (d) folgt aus der Tatsache, daß $\mathfrak{M}_{\xi\mathfrak{r}} \geqq \xi\mathfrak{M}_\mathfrak{r}\xi^{-1}$ und $\mathfrak{M}_\mathfrak{r} = \mathfrak{M}_{\xi^{-1}\xi\mathfrak{r}} \geqq \xi^{-1}\mathfrak{M}_{\xi\mathfrak{r}}\xi$ gilt. (e) folgt aus der Forderung **(M)** und (c), da $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}_\mathfrak{r})$ bzw. $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}_\mathfrak{l})$ ein Normalteiler in $\mathfrak{M}_R$ ist.

---

[26]) Vgl. *N. Jacobson* [6b].

[27]) Die Bezeichnung $\mathfrak{M}_R$ für die Multiplikativgruppe von R ordnet sich der Bezeichnung der $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ sinngemäß unter.

Die Durchschnittsbeziehung von (c) folgt aus (a); weiter ist trivialerweise $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2} \geqq \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1} \cdot \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_2}$ erfüllt, da die Elemente des Gruppenkompositums endliche Produkte von Elementen $1 + \alpha_i$ mit quasiregulären $\alpha_i \in \mathfrak{r}_i$ ($i = 1$ oder 2) sind. Es bleibt zu zeigen, daß jedes Element der Form $1 + \alpha_1 + \alpha_2$ mit quasiregulärem $\alpha_1 + \alpha_2$ ($\alpha_1 \in \mathfrak{r}_1$, $\alpha_2 \in \mathfrak{r}_2$) als endliches Produkt von Elementen aus $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ bzw. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_2}$ darstellbar ist (den analogen Beweis für Linksideale führen wir nicht aus).

Bei festem $\mathfrak{r}_2$ genügt es, dies für den Spezialfall, daß $\mathfrak{r}_1$ ein minimales Rechtsoberideal von $\mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{r}_2$ ist, nachzuweisen (der allgemeine Fall läßt sich bei Verwendung einer Kompositionsreihe von Rechtsidealen iterativ hierauf zurückführen). Es sei also $1 + \alpha_1 + \alpha_2$ wie oben und $\mathfrak{r}_1$ ein minimales Rechtsoberideal von $\mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{r}_2$.

Fall I. $\alpha_1 \in \mathfrak{r}_1$ *ist quasiregulär.* — Dann existiert ein (quasireguläres) $\alpha_1^* \in \mathfrak{r}_1$ mit $\alpha_1 + \alpha_1^* + \alpha_1\alpha_1^* = 0$, also ist $(1 + \alpha_1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1^*) = 1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_1^* \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_2}$. Somit ist

$$1 + \alpha_1 + \alpha_2 = (1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_1^*)(1 + \alpha_1) \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1} \cdot \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_2}.$$

Folgerung. Sind alle Elemente von $\mathfrak{r}_1$, die nicht schon in $\mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{r}_2$ liegen, im Radikal $\mathfrak{n}$ von R enthalten, so sind sie alle quasiregulär und es gilt $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1} \cdot \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_2}$. — Entsprechend schließt man, falls nicht α_1 aber α_2 quasiregulär ist. — Es bleibt also

Fall II. $\alpha_1 \in \mathfrak{r}_1$ *und* $\alpha_2 \in \mathfrak{r}_2$ *sind nicht quasiregulär, aber* $\alpha_1 + \alpha_2$ *ist quasiregulär.* Dann ist weder α_1 noch α_2 im Radikal enthalten und $\mathfrak{r}_1$ enthält zusätzlich zu $\mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{r}_2$ Elemente, die nicht in $\mathfrak{n}$ liegen; ihre Restklassen mod $\mathfrak{n}$ bilden ein einfaches Rechtsideal $\bar{\mathfrak{r}}_1^*$ von $\bar{R} = R/\mathfrak{n}$.

Kann $\bar{1} + \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$ durch Multiplikation mit einem endlichen Produkt von Elementen aus $\mathfrak{M}_{\bar{\mathfrak{r}}_1}$ bzw. $\mathfrak{M}_{\bar{\mathfrak{r}}_2}$[28]) auf die Form $\bar{1} + \bar{\alpha}_1' + \bar{\alpha}_2'$ mit quasiregulärem $\bar{\alpha}_1' \in \bar{\mathfrak{r}}_1$ übergeführt werden, dann ist unter Beachtung der ersten Äquivalenzaussage für die Quasiregularität Fall II auf Fall I zurückgeführt.

Es sei $\bar{R} = \bar{A}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{A}_m$ die Zerlegung von $\bar{R}$ in einfache Bestandteile und o. B. d. A. $\bar{\mathfrak{r}}_1^*$ und somit die über $\bar{\mathfrak{r}}_1 \cap \bar{\mathfrak{r}}_2$ hinausgehende Komponente $\bar{\alpha}_1^*$ von $\bar{\alpha}_1$ in $\bar{A}_1$ enthalten. Dann muß auch $\bar{\alpha}_2$ eine von Null verschiedene Komponente in $\bar{A}_1$ haben (sonst wäre die Komponente von $\bar{1} + \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$ in $\bar{A}_1$ und folglich auch $\bar{1} + \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$ ein Nullteiler in $\bar{A}_1$). Da $\bar{A}_1$ mindestens zwei verschiedene Rechtsideale enthält, kann $\bar{A}_1$ kein Galoisfeld sein.

Es bezeichne $\bar{\mathfrak{r}}_2^*$ die Komponente von $\bar{\mathfrak{r}}_2$ in $\bar{A}_1$ und $\bar{\alpha}_2^*$ die in $\bar{\mathfrak{r}}_2^*$ gelegene Komponente von $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$, während $\bar{\alpha}_1^*$ in $\bar{\mathfrak{r}}_1^*$ liegt[29]). Die Darstellung $\bar{A}_1 = k_{rr}$ von $\bar{A}_1$ als r-reihiger Matrizenring über einem Galoisfeld k sei so gewählt, daß das einfache Rechtsideal $\bar{\mathfrak{r}}_1^*$ die erste Zeile und $\bar{\mathfrak{r}}_2^*$ die 2-te bis ϱ-te Zeile von k_{rr} ist. Da $\bar{\alpha}_1^*$ nicht quasiregulär ist, hat es die Form $\bar{\alpha}_1^* = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$; da weiter $\bar{\alpha}_1^* + \bar{\alpha}_2^*$ quasiregulär ist, muß in der Matrizendarstellung von $\bar{1} + \bar{\alpha}_1^* + \bar{\alpha}_2^*$

[28]) Elemente bzw. Ideale aus $\bar{R}$ werden durch Überstreichen gekennzeichnet, sofern es sich um Restklassen von entsprechenden Bildungen aus R handelt.

[29]) Die Komponenten in $\bar{A}_1$ der Elemente bzw. Ideale von $\bar{R}$ seien durch einen Stern gekennzeichnet.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_\varrho \\ b_{21} & 1+b_{22} & \dots & b_{2\varrho} \\ & & & \vdots \\ b_{\varrho 1} & \dots & \dots & 1+b_{\varrho\varrho} \end{vmatrix} \neq 0$$

sein (Determinante der ϱ-reihigen Teilmatrix in der oberen linken Ecke), d. h. es ist mindestens ein $a_\lambda \neq 0$ $(2 \leqq \lambda \leqq \varrho)$. Bezeichne $\bar{\beta}_2^*$ das quasireguläre Element aus $\bar{\mathfrak{r}}_2^*$, das in der ersten Spalte in der λ-ten Zeile $\frac{1}{a_\lambda}$ und sonst überall 0 stehen hat, so ist $\bar{\alpha}_1^*(\bar{1}^* + \bar{\beta}_2^*)$ quasiregulär und liegt in $\bar{\mathfrak{r}}_1^*$; also wird $(\bar{1}^* + \bar{\alpha}_1^* + \bar{\alpha}_2^*)(\bar{1}^* + \bar{\beta}_2^*) = \bar{1}^* + \bar{\alpha}_1' + \bar{\alpha}_2'$ mit quasiregulärem $\bar{\alpha}_1' = \bar{\alpha}_1^* + \bar{\alpha}_1^* \bar{\beta}_2^* \in \bar{\mathfrak{r}}_1^*$. Hierdurch ist Fall II auf Fall I zurückgeführt und (c) und somit auch Lemma 2 in allen Teilen bewiesen.

Lemma 2 zeigt, daß Durchschnitts- und Kompositumbildung von Idealen und zugeordneten Einheitengruppen sich völlig entsprechen. — Von jetzt ab (ausgenommen die idealtheoretischen Überlegungen in **3. 3** und **3. 4**) setzen wir stets voraus, daß **(M)** in R erfüllt ist.

Ist $\Gamma(\xi)$ eine Multiplikativdarstellung von R vom Grad $l(\Gamma)$, d. h. eine Darstellung der Multiplikativgruppe $\mathfrak{M}_R$ von R durch $l(\Gamma)$-reihige reguläre Matrizen, und $\mathfrak{a}$ ein ein- oder zweiseitiges Ideal von R, so heiße $\Gamma(\xi)$ *nach* $\mathfrak{a}$ *erklärbar*, wenn $\Gamma(\xi) = E_{l(\Gamma)}$ ist für alle $\xi \in \mathfrak{M}_\mathfrak{a}$.

Sind nun $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ zwei Rechtsideale, nach denen $\Gamma(\xi)$ erklärbar ist, so ist $\Gamma(\xi)$ wegen Lemma 2, (c) auch nach $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$ erklärbar, denn es ist $\Gamma(\xi) = E_{l(\Gamma)}$ für alle Elemente des Gruppenkompositums $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1} \cdot \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_2}$. Demzufolge gibt es ein maximales Rechtsideal $\mathfrak{r}(\Gamma)$, nach dem $\Gamma(\xi)$ erklärbar ist, und entsprechend ein maximales Linksideal $\mathfrak{l}(\Gamma)$. Wegen **1. 1h**, Lemma 2 (d) und (e) ist dann $\mathfrak{r}(\Gamma) = \mathfrak{l}(\Gamma) = \mathfrak{f}(\Gamma)$ ein *zweiseitiges Ideal.* Dieses zweiseitige Ideal $\mathfrak{f}(\Gamma)$ enthält jedes ein- oder zweiseitige Ideal von R, nach dem $\Gamma(\xi)$ erklärbar ist; es ist also das maximale Ideal von R, nach dem $\Gamma(\xi)$ erklärbar ist.

Definition 4. *Das eindeutig bestimmte maximale zweiseitige Ideal* $\mathfrak{f}(\Gamma)$, *nach dem* $\Gamma(\xi)$ *erklärbar ist, heiße der Führer der Multiplikativdarstellung* $\Gamma(\xi)$ *von* R. *Ist speziell* $\Gamma(\xi)$ *eine irreduzible Darstellung von* $\mathfrak{M}_R$ *und* $\mathfrak{f}(\Gamma) = (0)$, *so heiße* $\Gamma(\xi)$ *eine eigentliche irreduzible Multiplikativdarstellung von* R *und die mit einer solchen Darstellung* $\Gamma(\xi)$ *gebildete Gaußsche Summe* $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ *werde eine irreduzible eigentliche Gaußsche Summe genannt*[30]).

Zunächst wollen wir feststellen, wie sich die Führer von Multiplikativdarstellungen bei der Reduktion auf irreduzible Darstellungen und der Komponentenzerlegung der Multiplikativdarstellungen verhalten (die entsprechenden Reduktionen für die Gaußschen Summen sind ja bereits durchgeführt).

Sind $\Gamma_1(\xi)$ bzw. $\Gamma_2(\xi)$ zwei Multiplikativdarstellungen von R mit den Führern $\mathfrak{f}(\Gamma_1)$ bzw. $\mathfrak{f}(\Gamma_2)$, dann gilt nach Definition des Führers zunächst $\mathfrak{f}(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) \geqq \mathfrak{f}(\Gamma_1) \cap \mathfrak{f}(\Gamma_2)$. Andererseits muß aber $\Gamma_1(\xi) = E_{l(\Gamma_1)}$ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2)}$ sein, da $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ die direkte Summe der beiden Darstellungen ist, und folglich ist $\mathfrak{f}(\Gamma_1) \geqq \mathfrak{f}(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2)$; entsprechendes gilt für $\Gamma_2(\xi)$. Hieraus folgt

$$\mathfrak{f}(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = \mathfrak{f}(\Gamma_1) \cap \mathfrak{f}(\Gamma_2). \tag{3. 13}$$

[30]) Die Existenz eigentlicher Multiplikativdarstellungen und damit eigentlicher Gaußscher Summen in einem beliebigen Ring R kann nicht erwartet werden (vgl. [7a]); auf diese Frage kommen wir anschließend zurück.

Ist $\Gamma(\xi)$ eine irreduzible Multiplikativdarstellung von R und

$$\Gamma(\xi) \sim \Gamma^{(1)}(\xi_1) \times \cdots \times \Gamma^{(n)}(\xi_n)$$

die der Komponentenzerlegung von R gemäß (2. 14) und (2. 16) entsprechende Zerlegung von $\Gamma(\xi)$ in irreduzible Darstellungen der Komponentenringe R_i, dann bestätigt man unmittelbar die Beziehung:

$$\mathfrak{f}(\Gamma) = \mathfrak{f}_1(\Gamma^{(1)}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{f}_n(\Gamma^{(n)}), \tag{3. 14}$$

wobei $\mathfrak{f}_i(\Gamma^{(i)})$ der Führer der induzierten Komponente $\Gamma^{(i)}(\xi_i)$ in R_i ist $(i = 1, \ldots, n)$. Aus diesen Überlegungen folgt das

Lemma 3. *Ist $\Gamma(\xi) \sim g_1\Gamma_1(\xi) \oplus \cdots \oplus g_s\Gamma_s(\xi)$ eine Multiplikativdarstellung von R, so ist ihr Führer gleich dem Durchschnitt der Führer ihrer irreduziblen Bestandteile $\Gamma_\sigma(\xi)$, d. h.*

$$\mathfrak{f}(\Gamma) = \mathfrak{f}(\Gamma_1) \cap \cdots \cap \mathfrak{f}(\Gamma_s)^{31)}. \tag{3. 15}$$

Ist $\Gamma(\xi)$ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{M}_R$, so sind die Komponenten $\mathfrak{f}_i(\Gamma)$ ihres Führers $\mathfrak{f}(\Gamma)$ gleich den Führern $\mathfrak{f}_i(\Gamma^{(i)})$ ihrer induzierten Komponenten $\Gamma^{(i)}(\xi_i)$ in R_i. Eine irreduzible Darstellung $\Gamma(\xi)$ ist somit dann und nur dann eigentlich, wenn jede ihrer induzierten Komponenten $\Gamma^{(i)}(\xi_i)$ in R_i eigentlich ist.

Weiter überlegen wir, wann es in einem Ring R eine Darstellung $\Gamma(\xi)$ mit $\mathfrak{f}(\Gamma) = (0)$ gibt. Sei dazu $\mathsf{P}(\xi)$ die reguläre Darstellung von $\mathfrak{M}_R$. Durch Zurückgehen auf die Komponentenringe R_i (man beachte, daß ein halbprimärer Komponentenring stets ein Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$ hat) sieht man leicht: *Es ist $\mathfrak{f}(\mathsf{P}) = (0)$ genau dann, wenn kein Komponentenring ein Galoisfeld von 2 Elementen ist* (in einem solchen existiert keine Multiplikativgruppe $\neq 1$). Wenn wir diesen letzteren Ausnahmefall ausschließen, so gilt stets

$$\bigcap_{\Gamma_i} \mathfrak{f}(\Gamma_i) = (0) \qquad (\Gamma_i \text{ alle irreduziblen Darstellungen von } \mathfrak{M}_R). \tag{3. 16}$$

Ist speziell R ein vollständig primärer Ring, der kein Galoisfeld von 2 Elementen ist, und setzen wir voraus, daß keine irreduzible Multiplikativdarstellung von R eigentlich ist, so folgt aus (3. 16), daß das Nullideal (0) von R als Durchschnitt zweiseitiger Ideale $\neq (0)$ darstellbar ist. Dies besagt: Ist ein vollständig primärer Ring R durchschnittsirreduzibel i. b. a. den Verband seiner *zweiseitigen* Ideale, so existiert mindestens eine eigentliche Multiplikativdarstellung von R[32]). Durch Übergang zu primären Ringen[33]) und anschließende direkte Summenbildung folgt das

Lemma 4. *Ist jeder Komponentenring R_i eines fastprimären Ringes R voller Matrizenring über einem vollständig primären Ring, der durchschnittsirreduzibel i. b. a. den Verband seiner zweiseitigen Ideale ist, so existiert eine eigentliche Multiplikativdardarstellung von R.*

Gemäß **1. 1h** induziert jede Multiplikativdarstellung $\Gamma(\xi)$ eine eigentliche Darstellung des Restklassenringes $R/\mathfrak{f}(\Gamma)$; umgekehrt liefert jede Darstellung eines Restklassenringes gemäß **1. 1j** eine Darstellung des Gesamtringes.

---

[31]) Eine reduzible Multiplikativdarstellung werde aus diesem Grund eigentlich genannt, wenn alle ihre irreduziblen Bestandteile eigentlich sind.

[32]) Diese Bedingung ist schwächer als die I-Regularität (vgl. **3. 4**).

[33]) Die zweiseitigen Ideale eines primären Ringes $R = Q_{mm}$ sind eineindeutig denen des vollständig primären Ringes Q zugeordnet und bestehen jeweils aus der Gesamtheit der Matrizen mit Elementen aus einem zweiseitigen Ideal von Q.

3. 3. Der Gültigkeitsbereich der Forderung (M).

Bei der Einführung des Führers einer Multiplikativdarstellung wurde wesentlich der in Lemma 2, (e) beschriebene Übergang von $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ zu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}(\mathfrak{r})}$ benutzt, der sich seinerseits auf die Forderung **(M)** stützt. Wir zeigen hier, daß **(M)** in fast allen endlichen Ringen mit Einselement, jedenfalls in allen für die Anwendungen wesentlichen Typen, erfüllt ist; durch ein Gegenbeispiel wird anschließend gezeigt, daß es mindestens einen Ring gibt, in dem **(M)** nicht gilt.

Lemma 5. *Die Forderung* **(M)** *ist dann und nur dann in einem endlichen Ring R mit Einselement erfüllt, wenn sie in jedem seiner Komponentenringe R_i erfüllt ist. Hinreichend für die Gültigkeit von* **(M)** *in einem Komponentenring R_i ist einerseits, daß R_i ein primärer Ring ist, und andererseits, daß kein einfacher Bestandteil des Radikalrestklassenringes $\bar{R}_i = R_i/\mathfrak{n}_i$ von R_i ein Galoisfeld von 2 Elementen ist*[34]. *Insbesondere ist* **(M)** *in allen fastprimären Ringen erfüllt.*

Beweis. Wir beschränken uns wieder auf die Untersuchung für Rechtsideale $\mathfrak{r}$. Ist $\sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \xi\mathfrak{r}$ ein zweiseitiges Ideal, so ist es gleich $\mathfrak{m}(\mathfrak{r})$ und umgekehrt. Ferner ist ein Rechtsideal $\mathfrak{r}$ von R genau dann ein zweiseitiges Ideal, wenn jede seiner Komponenten $\mathfrak{r}_i$ bei der Zerlegung von R in Komponentenringe R_i ein zweiseitiges Ideal in R_i ist. Hieraus folgt, daß die Gültigkeit von **(M)** in R mit der von **(M)** in jedem Komponentenring R_i äquivalent ist. Die hinreichenden Bedingungen für **(M)** in Komponentenringen verifizieren wir, indem wir zeigen, daß jeder Nullteiler als Summe bzw. Differenz von 2 Nichtnullteilern darstellbar ist, denn dann ist $\sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \xi\mathfrak{r} = \sum_{\xi \in R} \xi\mathfrak{r}$.

Da jedes nilpotente Element α quasiregulär ist, ist es in der Form $\alpha = (1 + \alpha) - 1$ als Differenz zweier Einheiten darstellbar. Hieraus folgt, daß in einem vollständig primären Ring jeder Nullteiler als Differenz zweier Nichtnullteiler darstellbar (denn jeder Nullteiler ist hier nilpotent) und somit **(M)** erfüllt ist.

Es sei jetzt R_i ein beliebiger Komponentenring. Ein Nullteiler $\alpha \in R_i$ ist dann und nur dann als Differenz zweier Nichtnullteiler darstellbar, wenn das Entsprechende für seine Restklasse $\bar{\alpha}$ mod $\mathfrak{n}_i$ in $\bar{R}_i = R_i/\mathfrak{n}_i$ gilt (beachte die Quasiregularität der Elemente aus dem Radikal $\mathfrak{n}_i$). Wenn in jedem einfachen Bestandteil $\bar{A}_{i,\mu}$ von $\bar{R}_i$ jedes Element als Differenz zweier Nichtnullteiler darstellbar ist, so ist jeder Nullteiler von $\bar{R}_i$ als Differenz zweier Nichtnullteiler darstellbar und umgekehrt.

Fall 1. $\bar{A}_{i,\mu}$ ist ein Galoisfeld mit mehr als zwei Elementen. Dann läßt sich jedes Element $\bar{\alpha}_\mu$ aus $\bar{A}_{i,\mu}$ als Differenz zweier von 0 verschiedener Elemente darstellen.

Fall 2. $\bar{A}_{i,\mu}$ ist r-reihiger ($r \geqq 2$) Matrizenring k_{rr} über einem beliebigen Galoisfeld k. Einem Element $\xi \in \bar{A}_{i,\mu}$ ist dann invariant als Rang $\varrho(\bar{\xi})$ die Zeilenzahl der größten von Null verschiedenen Unterdeterminante einer beliebigen Matrizendarstellung von $\bar{\xi}$ zugeordnet; es ist $0 \leqq \varrho(\bar{\xi}) \leqq r$ ($\varrho(\bar{\xi}) = r$ besagt, daß $\bar{\xi}$ Nichtnullteiler ist). Der Rang ist unabhängig von der zugrundegelegten Matrizendarstellung, ändert sich nicht bei rechts- bzw. linksseitiger Multiplikation mit regulären Matrizen (Nichtnullteilern) und jedes Element vom Rang ϱ kann in jedes andere mit dem gleichen Rang durch rechts- bzw. linksseitige Multiplikation mit regulären Matrizen übergeführt werden (Zeilen- und Spaltenvertauschung bzw. -addition usw.). Es genügt somit für jeden Rang ein Element anzugeben, das als Differenz zweier Nichtnullteiler darstellbar ist. Für $0 \leqq \varrho \leqq r - 1$ leistet dies

$$\xi_\varrho = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \\ & 0 & & 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \vdots \\ & \mathbf{0} & & & & & & 0 \end{pmatrix} \Bigg\} \varrho \; ;$$

denn $1 + \xi_\varrho$ ist Nichtnullteiler und $(1 + \xi_\varrho) - 1 = \xi_\varrho$ eine solche Darstellung. Für $\varrho = r$ ist der Nichtnullteiler

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & \ddots & \cdot \\ \cdot & & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ als Differenz der Nichtnullteiler } \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ \cdot & \ddots & \ddots & & \\ \cdot & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

darstellbar. Somit ist Lemma 5 bewiesen.

---

[34]) Ferner bestätigt man durch Nachrechnen leicht, daß auch ein zweireihiger Quasimatrizenring (vgl. [7c], S. 376) über dem Galoisfeld von 2 Elementen, sowie ein Matrizenring über einem solchen Galoisfeld, bei dem auf einer Seite der Hauptdiagonalen lauter Nullen stehen, die Eigenschaft **(M)** hat.

Gegenbeispiel. Es sei zunächst k ein beliebiges Galoisfeld und R folgende Algebra vom Rang 9 über k. R bestehe aus der Gesamtheit der Elemente $\xi = \sum_{i,k=1}^{3} x_{ik}\varepsilon_{ik}$ mit $x_{ik} \in k$, wobei die Basiselemente ε_{ik} dem Multiplikationsschema

$$\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl} = \delta_{ik}\delta_{kj}\varepsilon_{jl} + (1 - \delta_{ik})\,\delta_{kj}\delta_{jl}\varepsilon_{ik} \tag{3.17}$$

(δ_{ik} das Kroneckersymbol) genügen. R ist ein halbprimärer Ring mit dem Zentrum $(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\,k$ und von ähnlicher Struktur wie ein 2-reihiger Quasimatrizenring über k (vgl. hierzu [7c], S. 376); das Radikal $\mathfrak{n}$ von R besteht aus der Gesamtheit der Elemente $\xi = \sum_{i \neq k} x_{ik}\varepsilon_{ik}$.

Die Elemente $(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{31})\,x$ mit $x \in k$ bilden ein minimales im Radikal enthaltenes Rechtsideal $\mathfrak{r}$ von R. Da $\mathfrak{m}(\mathfrak{r})$ aus der Gesamtheit der Elemente $\varepsilon_{21}x + \varepsilon_{31}y$ mit $x, y \in k$ besteht, ist $\mathfrak{r}$ kein zweiseitiges Ideal.

Setzen wir nun zusätzlich voraus, daß k das Galoisfeld von 2 Elementen ist, so besteht $\mathfrak{M}_R$ aus allen Elementen der Form $\sum_i \varepsilon_{ii} + \alpha$ mit α aus dem Radikal $\mathfrak{n}$ von R. Da $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{n}$ enthalten ist und sich Elemente aus dem Radikal gegenseitig annullieren, ist $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{M}_R$. Somit ist **(M)** in diesem Gegenbeispiel nicht erfüllt und dieses Beispiel zeigt, daß Lemma 5 nicht wesentlich verallgemeinert werden kann (man beachte hierzu, daß der Radikalrestklassenring von R aus der direkten Summe von 3 Galoisfeldern von 2 Elementen besteht).

3. 4. Idealtheoretische Hilfsbetrachtungen und Beispiele.

Zunächst geben wir einen Hilfssatz an, den wir später benötigen.

Lemma 6. *Es sei R ein Komponentenring mit einem Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$. Dann besitzt jedes zweiseitige Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ mindestens ein von (0) verschiedenes in $\mathfrak{n}$ enthaltenes (echtes oder unechtes) zweiseitiges Unterideal. Ist R sogar dual, so gilt für die beiden Annullatoren seines Radikals*

$$\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{n}_r = \mathfrak{n}_l \quad \textit{und} \quad \mathfrak{n}_r^2 = \mathfrak{n}_l^2 = (0). \tag{3.18}$$

Beweis. Die erste Aussage ist für jedes $\mathfrak{a} \neq (0)$ mit $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{a}$ und somit auch in einem primären Ring trivialerweise erfüllt. Sei jetzt R ein halbprimärer Komponentenring und $\mathfrak{a} \lneqq \mathfrak{n}$ ein zweiseitiges Ideal von R; wir zeigen, daß $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n} \neq (0)$ ist. Wäre nämlich $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n} = (0)$, so folgte, da $\mathfrak{a}\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{a}$, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\mathfrak{a} = (0)$ ist; hierdurch ist der Fall $R = \mathfrak{a}$ schon ausgeschlossen. Folglich gilt im Radikalrestklassenring $\bar{R} = \bar{\mathfrak{a}} \oplus \bar{\mathfrak{b}}$ mit $\mathfrak{b} \neq (0)$, d. h. $\bar{\mathfrak{a}}$ ist ein halbeinfacher Bestandteil von R. Bezeichne $\mathfrak{b}$ das zweiseitige Ideal von R, das aus allen Elementen $\xi \in R$ besteht, deren Restklassen mod $\mathfrak{n}$ in $\bar{\mathfrak{b}}$ liegen, so folgte aus der Annahme $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n} = (0)$, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a} = (0)$, also R kein Komponentenring wäre; dies ist ein Widerspruch.

Es sei jetzt R dual und $\bar{R} = R/\mathfrak{n} = \bar{A}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{A}_m$ die Zerlegung von $\bar{R}$ in einfache Bestandteile $\bar{A}_\mu$. Die m maximalen zweiseitigen Ideale $\mathfrak{a}_i$ von R entsprechen umkehrbar eindeutig den maximalen zweiseitigen Idealen $\bar{\mathfrak{a}}_i$ von $\bar{R}$. Es ist $\bar{\mathfrak{a}}_i = \operatorname{dir} \sum_{j \neq i} \bar{A}_j$ und $\mathfrak{a}_i$ die Gesamtheit der Elemente aus R, deren Restklassen mod $\mathfrak{n}$ in $\bar{\mathfrak{a}}_i$ liegen; also ist $\mathfrak{a}_i \geqq \mathfrak{n}$. Da $\bar{\mathfrak{a}}_1 \cap \bar{\mathfrak{a}}_2 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{a}}_m = (\bar{0})$ ist, folgt $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_m = \mathfrak{n}$. Wegen der Dualität von R sind $(\mathfrak{a}_j)_r$ und $(\mathfrak{a}_j)_l$ jeweils minimale zweiseitige Ideale von R; aus der ersten Aussage dieses Lemmas folgt also $\mathfrak{n} \geqq (\mathfrak{a}_j)_r$ und $\mathfrak{n} \geqq (\mathfrak{a}_j)_l$ $(j = 1, \ldots, m)$. Nach den Regeln für die Annullatorbildung in dualen Ringen (vgl. [7c]) ist dann zunächst $\mathfrak{n}_r = (\mathfrak{a}_1)_r + \cdots + (\mathfrak{a}_m)_r \leqq \mathfrak{n}$ und entsprechend $\mathfrak{n}_l \leqq \mathfrak{n}$. Da andererseits jedes minimale Ideal ein maximales Ideal zum Annullator hat und es nur m verschiedene maximale zweiseitige Ideale gibt, folgt $(\mathfrak{n}_r)_r = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_m = \mathfrak{n}$, also auch $\mathfrak{n}_r = \mathfrak{n}_l$ und $\mathfrak{n}_r^2 = \mathfrak{n}_l^2 = (0)$, womit Lemma 6 bewiesen ist.

Wir geben anschließend ein ringtheoretisches Beispiel an, das naheliegende Fragestellungen und Vermutungen über die verschiedenen idealtheoretischen Durchschnitts-

begriffe, die Regularität und Dualität und die idealtheoretischen Eigenschaften von Führern und Erklärungsmoduln beantwortet. Bemerkenswert an diesem Beispiel ist, daß verschiedenartige Phänomene schon in einem einzigen Ring von relativ einfacher Struktur auftreten, nämlich in einem vollständig primären endlichen Ring, der zugleich Algebra endlichen Ranges über einem Körper ist; aus diesem Grund ist dieses Beispiel auch eine wesentliche Ergänzung zu den Paragraphen 2 und 3 unserer Arbeit [7c].

Beispiel. Es sei k ein kommutativer (endlicher oder nichtendlicher) Körper. Wir betrachten folgende Algebra R vom Rang 4 über k mit dem Einselement ε: Sie bestehe aus der Gesamtheit der Elemente $\xi = \varepsilon x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ mit $x_i \in k$, wobei die Basiselemente folgendem Multiplikationsschema genügen:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 = \varepsilon,\ \varepsilon\alpha_i = \alpha_i\varepsilon = \alpha_i\ (i = 1, 2, 3), \\ &\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 0,\ \alpha_1\alpha_2 = \alpha_3,\ \alpha_2\alpha_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Wegen (3.19) bildet die Gesamtheit der Elemente

$$\mathfrak{p}:\ \xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

das Radikal von R. Der Ring R ist ein vollständig primärer Ring (in dem beide Kettensätze für einseitige Ideale gelten); außerdem entnimmt man (3.19), daß R nichtkommutativ ist.

a. *R ist weder rechts- noch linksseitig durchschnittsirreduzibel, also auch nicht dual und auch nicht I-regulär.*

Beweis. Zum Beweis geben wir zwei vom Nullideal verschiedene Rechtsideale und Linksideale an, deren Durchschnitt jeweils das Nullideal ist:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{r}_1 = \alpha_2 R = (\alpha_2 x_2) \neq (0),\ \mathfrak{r}_2 = \alpha_3 R = (\alpha_3 x_3) \neq (0),\ \text{aber } \mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{r}_2 = (0); \\ &\mathfrak{l}_1 = R\alpha_1 = (\alpha_1 x_1) \neq (0),\ \mathfrak{l}_2 = R\alpha_3 = (\alpha_3 x_3) \neq (0),\ \text{aber } \mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{l}_2 = (0). \end{aligned}$$

Nach [7c] folgt dann, daß R *nicht* dual ist, d. h. daß in R keine echte lineare Funktion existiert und daß, falls k ein Galoisfeld ist, auch kein echter Additivcharakter von R existiert; ferner ist R sicher nicht I-regulär, d. h. (3.6) ist in R *nicht* erfüllt.

b. *R ist durchschnittsirreduzibel i. b. a. den Verband seiner zweiseitigen Ideale, d. h. es existiert ein minimales zweiseitiges Ideal $\mathfrak{m} \neq (0)$, das in allen zweiseitigen Idealen $\neq (0)$ enthalten ist.*

Beweis. Das Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{l}_2 = (\alpha_3 x_3) \neq (0)$ ist ein minimales zweiseitiges Ideal in R (vgl. **a**). Ist $\xi \neq 0$ ein beliebiges Element aus R, so bestätigt man an Hand des Multiplikationsschemas (3.19) leicht, daß stets entweder $\xi\eta = \alpha_3$ oder $\eta\xi = \alpha_3$ lösbar ist. Hieraus folgt aber, daß $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{m}$ ist für jedes zweiseitige Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$, was die Behauptung ergibt.

Folgerung: Ist speziell k ein Galoisfeld, so existiert in R nach Lemma 4 eine eigentliche Multiplikativdarstellung.

Das Ergebnis von **a** und **b** kann folgendermaßen zusammengefaßt werden: Es gibt vollständig primäre Ringe, die zwar nicht zweiseitig durchschnittsirreduzibel[35]), aber i. b. a. den Verband ihrer zweiseitigen Ideale durchschnittsirreduzibel sind.

c. Der Erklärungsmodul jeder symmetrischen linearen Funktion bzw. jedes symmetrischen Additivcharakters ist bekanntlich ein reguläres zweiseitiges Ideal. Bei nicht symmetrischen linearen Funktionen und Additivcharakteren entsteht nun die Frage, ob wenigstens der maximale zweiseitige Erklärungsmodul $\mathfrak{b}_e$ bzw. $\mathfrak{b}_s$ I-regulär ist. Antwort: *Der maximale zweiseitige Erklärungsmodul $\mathfrak{b}_e$ bzw. $\mathfrak{b}_s$ eines nicht symmetrischen Additivcharakters (linearen Funktion) ist i. a. nicht regulär*[36]).

Beweis. Wir geben ein Gegenbeispiel in unserem oben konstruierten Ring R an (bei linearen Funktionen kann dieses Beispiel wörtlich übertragen werden). — Es sei k ein Galoisfeld und $e_k[x]$ ein Nichthauptadditivcharakter von k. Setzen wir $e[\xi] = e_k[x_3]$ für $\xi \in R$, so bestätigt einfache Nachrechnung, daß $\mathfrak{r}_e = \alpha_2 R$ (vgl. **a**) und also kein zweiseitiges Ideal ist; folglich ist $e[\xi]$ nicht symmetrisch. Da $\mathfrak{r}_e = \mathfrak{r}_1$ minimales Rechtsideal ist, folgt $\mathfrak{b}_e = (0)$. Nun ist nach **a** das Nullideal nicht regulär, da R nicht I-regulär ist, was die Behauptung ergibt.

d. Wie in [7c], §§ 2—3 gezeigt wurde, ist die zweiseitige Durchschnittsirreduzibilität zusammen mit schwacher Beschränktheit in vollständig primären Ringen äquivalent der I-Regularität (3.6). Fordert man in einem solchen Ring andererseits nur die Gültigkeit der Regularitätsregeln (3.6) für zweiseitige Ideale, so folgt hieraus die Durchschnittsirreduzibilität i. b. a. die zweiseitigen Ideale. Die Umkehrung hiervon gilt jedoch nicht: *Aus der Durchschnittsirreduzibilität i. b. a. die zweiseitigen Ideale folgt i. a. nicht die Gültigkeit der Regularitätsregeln für zweiseitige Ideale*[37]).

---

[35]) D. h. rechtsseitig und linksseitig durchschnittsirreduzibel (vgl. [7c], § 2) sind.

[36]) Sogar in vollständig primären Ringen nicht.

[37]) Selbst dann nicht, wenn man die schärferen Rang- bzw. Anzahlregeln (3.3) der Dualität nicht mitfordert.

Beweis. Wir zeigen dies an Hand eines Beispieles im obigen Ring R (beachte, daß R durchschnittsirreduzibel i. b. a. zweiseitige Ideale ist). — Wir betrachten das zweiseitige Ideal $\mathfrak{m} = (\alpha_3 x_3)$. Zunächst ist $\mathfrak{m}_r = \mathfrak{p} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)$; weiter ist $\mathfrak{p}_l = \mathfrak{a} = (\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)$ wegen (3. 19). Hieraus folgt $(\mathfrak{m}_r)_l = \mathfrak{p}_l = \mathfrak{a} > \mathfrak{m}$ im Widerspruch zu (3. 6), was zu zeigen war.

Schließlich seien noch einige Bemerkungen zu Komponentenringen ohne Radikal angefügt, die wir später benötigen werden. Ein Komponentenring R mit dem Radikal $\mathfrak{n} = (0)$ ist ein einfacher Ring, d. h. ein voller Matrizenring k_{rr} über einem Galoisfeld k; $R = k_{rr}$ ist dual und R und (0) sind die beiden einzigen zweiseitigen Ideale dieses Ringes.

Genau so wie in **3. 3** (vgl. S. 20) jedem Element $\xi \in R$ invariant ein Rang $\varrho(\xi)$ mit $r \geqq \varrho(\xi) \geqq 0$ zugeordnet wurde, kann jedem Rechtsideal $\mathfrak{r}$ bzw. Linksideal $\mathfrak{l}$ von R in invarianter Weise ein *Rang* $\varrho(\mathfrak{r})$ bzw. $\varrho(\mathfrak{l})$ zugeordnet werden, nämlich der maximale Elementrang von $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{l}$. *Alle Rechtsideale von R vom gleichen Rang $\varrho(\mathfrak{r})$ sind zueinander konjugiert*, d. h. gehen in der Form $\xi\mathfrak{r}$ ($\xi \in \mathfrak{M}_R$) auseinander hervor; entsprechendes gilt für Linksideale.

Die Anzahl $A(\varrho', R)$ der Elemente ξ aus R mit $\varrho(\xi) \leqq \varrho'$ ($\varrho' \leqq r$) kann folgendermaßen durch die Elementanzahlen einseitiger Ideale ausgedrückt werden:

$$A(\varrho', R) = \sum_{\nu=0}^{\varrho'} a_{\varrho',\nu}(R) \sum_{\substack{\mathfrak{r}_\nu \text{ mit} \\ \varrho(\mathfrak{r}_\nu)=\nu}} A_R(\mathfrak{r}_\nu), \tag{3. 20}$$

mit ganzen Zahlen $a_{\varrho',\nu}(R)$, $a_{\varrho',\varrho'}(R) = 1$[38]).

Durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen folgt, daß bei Benutzung von Linksidealen die (3. 20) entsprechende Formel mit den gleichen $a_{\varrho,\nu}(R)$ gilt. Will man die Anzahl $A^*(\varrho', R)$ der quasiregulären Elemente $\xi \in R$ mit $\varrho(\xi) \leqq \varrho'$ wissen, so ist in (3. 20) jeweils $A_R(\mathfrak{r})$ durch $A_R^*(\mathfrak{r}) = A_P(\mathfrak{M}_\mathfrak{r})$ zu ersetzen und entsprechend bei Linksidealen[39]).

3. 5. Identitätsindizes, vollkommene und volleigentliche Multiplikativdarstellungen.

Die in **3. 2** angegebene Klassifikation der Multiplikativdarstellungen durch ihre Führer reicht im Fall nichtkommutativer Ringe nur zu einer groben Klassifikation der Gaußschen Summen aus, da in sie praktisch nur zweiseitige Ideale eingehen. Wir geben deshalb noch eine auch die einseitigen Ideale berücksichtigende Feinstruktur der Multiplikativdarstellungen an; dazu folgende Überlegungen:

Ist $\Gamma(\xi)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so nennen wir die Zahl $l(\Gamma, \mathfrak{U})$, die angibt, wie oft die identische Darstellung von $\mathfrak{U}$ in der gemäß **1. 1h** durch Γ auf $\mathfrak{U}$ induzierten Darstellung enthalten ist, den *Identitätsindex von Γ bzgl.* $\mathfrak{U}$; es ist stets $0 \leqq l(\Gamma, \mathfrak{U}) \leqq l(\Gamma)$.

Dies wenden wir im Fall der Multiplikativdarstellungen von Ringen R, in denen **(M)** gilt, auf die den Idealen zugeordneten Einheitengruppen an, und zwar beschränken wir uns zunächst auf Rechtsideale $\mathfrak{r}$, die ja die zweiseitigen Ideale enthalten. Trivialerweise ist $l(\Gamma, \mathfrak{M}_\mathfrak{r}) = l(\Gamma)$, falls $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{f}(\Gamma)$, und $l(\Gamma, \mathfrak{M}_\mathfrak{r}) < l(\Gamma)$, falls $\mathfrak{r} \not\leqq \mathfrak{f}(\Gamma)$ ist; ferner ist $l(\Gamma, \mathfrak{M}_\mathfrak{r}) = l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\xi\mathfrak{r}})$, wenn $\xi \in \mathfrak{M}_R$, und entsprechend für Linksideale.

---

[38]) Alle konjugierten Rechtsideale haben jeweils den gleichen Koeffizienten $a_{\varrho',\nu}(R)$ in dieser Abzählung; denn schreibt man die $\mathfrak{r}$ mit $\varrho(\mathfrak{r}) < \varrho'$ als Durchschnitte von Idealen vom Rang ϱ', so überträgt sich die Konjugiertenbildung auf die Ideale niederen Ranges; die numerischen Werte der $a_{\varrho',\nu}(R)$ interessieren uns vorläufig nicht.

[39]) Vgl. die analogen Überlegungen in [7a], S. 154—155.

Definition 5. *Eine Multiplikativdarstellung $\Gamma(\xi)$ von R heiße* **vollkommen**, *falls $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}) = 0$ ist für jedes nicht in $\mathfrak{f}(\Gamma)$ enthaltene Rechtsideal $\mathfrak{r}$ von R; ist $\Gamma(\xi)$ vollkommen und eigentlich, so heiße $\Gamma(\xi)$* **volleigentlich**. *Die Bezeichnung vollkommen bzw. volleigentlich wird auf Gaußsche Summen übertragen, wenn sie für ihre Multiplikativdarstellungen zutrifft.*

Auf Grund dieser Definition kann man sich zur Feststellung der Vollkommenheit einer Multiplikativdarstellung auf die Untersuchung der minimalen Rechtsoberideale von $\mathfrak{f}(\Gamma)$ beschränken; wir zeigen anschließend, daß in vielen Fällen die Linksoberideale von $\mathfrak{f}(\Gamma)$ das gleiche leisten.

Lemma 7. *Die Vollkommenheit einer reduziblen Multiplikativdarstellung $\Gamma(\xi)$ ist damit äquivalent, daß erstens alle ihre irreduziblen Bestandteile $\Gamma_i(\xi)$ den gleichen Führer haben und zweitens alle $\Gamma_i(\xi)$ selbst vollkommen sind; die Vollkommenheit einer irreduziblen Multiplikativdarstellung Γ von R ist gleichbedeutend mit der Vollkommenheit aller ihrer induzierten Komponenten $\Gamma^{(i)}$ in den Komponentenringen R_i von R. Jede Multiplikativdarstellung 1. Grades ist vollkommen; jede eigentliche Multiplikativdarstellung in einem dualen vollständig primären Ring ist volleigentlich. Ist $\Gamma(\xi)$ eine irreduzible eigentliche aber nicht volleigentliche Multiplikativdarstellung in einem dualen Komponentenring R mit dem Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$, so gibt es auch mindestens ein minimales Linksideal $\mathfrak{l} \neq (0)$ mit $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}}) \neq 0$; ferner haben mit einem irreduziblen Bestandteil $\Delta_i(1+\gamma)$ von $\Gamma(\xi)$ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ alle Δ_i die Eigenschaft, auf mindestens einer Untergruppe $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_i}$ ($\mathfrak{r}_i \neq (0)$) und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_i}$ ($\mathfrak{l}_i \neq (0)$) identisch 1 zu werden, und die $\mathfrak{r}_i$ bzw. $\mathfrak{l}_i$ sind jeweils zueinander konjugiert. Ist $\Gamma(\xi)$ eine eigentliche Multiplikativdarstellung eines einfachen Ringes R, so ist stets $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_\nu}) = l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_\nu})$, falls $\varrho(\mathfrak{r}_\nu) = \varrho(\mathfrak{l}_\nu)$ ist.*

Beweis. Die Äquivalenzaussagen der Vollkommenheit, sowie die Vollkommenheit der Darstellungen 1. Grades sind unmittelbare Folgerungen der Definition bzw. folgen aus früheren Bemerkungen. — Die Vollkommenheit der eigentlichen Darstellungen in einem dualen vollständig primären Ring R folgt aus der Tatsache, daß in R ein minimales von (0) verschiedenes Rechtsideal existiert und daß dieses sogar zweiseitig ist (vgl. [7c], §§ 2—3).

Es sei nun speziell R ein dualer Komponentenring mit einem Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$ und $\Gamma(\xi)$ eine irreduzible Multiplikativdarstellung von R. Wegen (3. 18) gilt dann für die Elemente η des Normalteilers $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ bei dem Ansatz $\eta = 1 + \gamma$ mit $\gamma \in \mathfrak{n}_r$ (alle $\gamma \in \mathfrak{n}_r$ sind quasiregulär) die Verknüpfungsregel

$$(3.\ 21) \qquad (1+\gamma_1)(1+\gamma_2) = 1 + \gamma_1 + \gamma_2 \qquad (\gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{n}_r),$$

d. h. die Zuordnung $1 + \gamma \to \gamma$ ist eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ auf die Additivgruppe $\mathfrak{n}_r$; somit ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ eine abelsche Gruppe und die von $\Gamma(\xi)$ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ induzierte Darstellung zerfällt in irreduzible Darstellungen $\Delta_i(1+\gamma)$ vom Grade 1. Wegen (3. 21) und **1. 1g** ist dann bei Benutzung eines festen echten Additivcharakters $e[\xi]$ von R (der wegen der Dualität stets existiert) jeweils

$$(3.\ 22) \qquad \Delta_i(1+\gamma) = e[\beta_i \gamma] \quad (\gamma \in \mathfrak{n}_r,\ \text{Parameter } \beta_i \in R).$$

Ist β_i aus $\mathfrak{n}$, so ist $\Delta_i(1+\gamma)$ wegen (3. 18) der Hauptcharakter von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ und umgekehrt. Ist also speziell $\Gamma(\xi)$ eigentlich, so darf wegen **1. 11** keiner der Parameter β_i aus $\mathfrak{n}$ sein. Wegen (3. 22) ist ferner $\Delta_i(1+\gamma) = 1$ auf einer Untergruppe $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$($\mathfrak{r}$ minimales Rechtsideal) dann und nur dann, wenn der Parameter $\beta_i \in R$ ein Nullteiler in R ist. Falls $\beta_i \notin \mathfrak{M}_R$ ist, gibt es auch ein Linksideal, nämlich $\mathfrak{l}_{\beta_i e}$, so daß $\Delta_i(1+\gamma) = 1$ ist auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_{\beta_i e}}$ (und umgekehrt).

Ist $\Delta_i(1+\gamma) = e[\beta_i\gamma]$ eine beliebige Darstellung 1. Grades von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ und $\Gamma_{\Delta_i}(\xi)$ die durch Δ_i auf $\mathfrak{M}_R$ induzierte Darstellung (vgl. 1. 1i und (1. 10)), so zerfällt diese induzierte Darstellung $\Gamma_{\Delta_i}(\xi)$ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ (schon nach Konstruktion) in irreduzible Darstellungen 1. Grades von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$, die alle von der Form $e[\beta_i\xi\gamma\xi^{-1}]$ ($\xi \in \mathfrak{M}_R$) sind. Folglich sind die Rechts- bzw. Linksunterideale von $\mathfrak{n}_r$ mit der Eigenschaft, daß diese irreduziblen Bestandteile von Γ_{Δ_i} auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ für alle Elemente von $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{M}_\mathfrak{l}$ gleich 1 sind, jeweils konjugierte Ideale derjenigen von Δ_i, also sind sie im Grenzfall auch alle gleichzeitig gleich (0). Diese Aussagen übertragen sich auf die irreduziblen Bestandteile auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ der irreduziblen Bestandteile von Γ_{Δ_i} auf $\mathfrak{M}_R$ (eine Darstellungsklasse ist schon durch ihre Charaktere eindeutig bestimmt).

Sei nun $\Gamma(\xi)$ eine vorgegebene eigentliche Darstellung von $\mathfrak{M}_R$ und $\Delta_i(1+\gamma) = e[\beta_i\gamma]$ eine ihrer Komponenten 1. Grades auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$, so kommt $\Gamma(\xi)$ bei der Zerlegung von Γ_{Δ_i} in irreduzible Darstellungen (auf $\mathfrak{M}_R$) mindestens einmal vor. Folglich sind alle anderen irreduziblen Bestandteile von $\Gamma(\xi)$ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ von der Form $e[\beta_i\xi\gamma\xi^{-1}]$ mit $\xi \in \mathfrak{M}_R$ und haben mit $\Delta_i(1+\gamma)$ die Eigenschaft gemeinsam, auf mindestens einer Untergruppe $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ identisch 1 zu sein; diese ist dann stets zu der von Δ_i konjugiert. Ist andererseits ein irreduzibler Bestandteil Δ_i von Γ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}_r}$ für kein $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ identisch 1, so gilt dies auch für alle anderen.

Die Aussage $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_\nu}) = l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_\nu})$, falls $\varrho(\mathfrak{r}_\nu) = \varrho(\mathfrak{l}_\nu)$ ist, für eigentliche irreduzible Darstellungen in einfachen Ringen $R = k_{rr}$ beweisen wir durch vollständige Induktion nach ϱ ($\varrho < r$). Für $\varrho = 0$ ist sie trivialerweise richtig, da hier nur das Nullideal in Frage kommt. — Wir nehmen nun an, daß die Aussage für alle $\varrho < \varrho'$ richtig sei, und behaupten ihre Richtigkeit für $\varrho = \varrho'$.

Zum Beweis bilden wir die Darstellungssumme

$$D_{\varrho'}(\Gamma, R) = \sum_{\substack{\gamma \in R,\ \varrho(\gamma) \leq \varrho' \\ \gamma \text{ quasiregulär}}} \Gamma(1+\gamma) \tag{3. 23}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\varrho'} a_{\varrho',\nu}(R) \sum_{\substack{\mathfrak{r}_\nu \text{ mit} \\ \varrho(\mathfrak{r}_\nu)=\nu}} \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_\nu}} \Gamma(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\varrho'} a_{\varrho',\nu}(R) \sum_{\substack{\mathfrak{l}_\nu \text{ mit} \\ \varrho(\mathfrak{l}_\nu)=\nu}} \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_\nu}} \Gamma(\zeta).$$

Da mit jedem Element auch alle seine bzgl. $\mathfrak{M}_R$ Konjugierten in dieser Summe auftreten, ist $\Gamma(\xi)\, D_{\varrho'}(\Gamma, R)\, \Gamma(\xi^{-1}) = D_{\varrho'}(\Gamma, R)$; die Matrix $D_{\varrho'}(\Gamma, R)$ ist also mit allen Matrizen einer irreduziblen Darstellung $\Gamma(\xi)$ vertauschbar und ist somit nach einem bekannten Satz eine *Skalarmatrix*, d. h.

$$D_{\varrho'}(\Gamma, R) = E_{l(\Gamma)} \cdot d_{\varrho'}(\Gamma, R) \qquad (d_{\varrho'}(\Gamma, R) = \text{komplexe Zahl}). \tag{3. 24}$$

Der Repräsentant der Darstellung Γ kann in $\{\Gamma\}$ jeweils so gewählt werden, daß wegen (1. 8)

$$\sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_\nu}} \Gamma(\zeta) = A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_\nu}) \cdot \left.\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}\right\} l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_\nu})\text{—mal}$$

gilt; da die Matrizenspur invariant bei Konjugiertenbildung ist, erhalten wir

$$\operatorname{Sp}\Big(\sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_\nu}} \Gamma(\zeta)\Big) = l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_\nu}) \cdot A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_\nu}) \tag{3. 25}$$

und dieser Ausdruck ist invariant beim Übergang zu konjugierten Idealen (die entsprechende Beziehung gilt auch für Linksideale). Bezeichne jeweils $b_\nu(R)$ die Anzahl der

zu $\mathfrak{r}_\nu$ konjugierten Rechtsideale mit $\varrho(\mathfrak{r}_\nu) = \nu$ (die gleiche Anzahl gilt für Linksideale), so erhalten wir wegen (3. 24) und (3. 25) durch Spurbildung aus (3. 23)

$$(3.\ 26) \qquad l(\Gamma)\, d_{\varrho'}(\Gamma, R) = \sum_{\nu=0}^{r_{\varrho'}} a_{\varrho',\nu}(R)\, b_\nu(R)\, l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_\nu}) \cdot A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_\nu})^{40)}.$$

Schreiben wir die gleiche Formel für Linksideale hin, so können wir die rechten Seiten gleichsetzen und erhalten wegen der Induktionsannahme und da

$$a_{\varrho',\varrho'}(R)\, b_{\varrho'}(R)\, A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_{\varrho'}}) = a_{\varrho',\varrho'}(R)\, b_{\varrho'}(R)\, A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_{\varrho'}}) \neq 0 \quad (\varrho' < r)$$

die Behauptung $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_{\varrho'}}) = l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_{\varrho'}})$, womit Lemma 7 vollständig bewiesen ist.

Dieses Lemma 7 zeigt, daß in dualen Ringen bei Erklärung der Volleigentlichkeit die Beschränkung auf Rechtsideale keine wirkliche Einschränkung war. — In kommutativen Ringen bedeutet die Vollkommenheit für irreduzible Multiplikativdarstellungen keine neue Klassifikation, da diese sämtlich vom Grad 1 sind; die Bedeutung der Vollkommenheit wirkt sich erst, wie wir anschließend zeigen, im Nichtkommutativen aus.

Der *Existenznachweis* für vollkommene und volleigentliche Multiplikativdarstellungen ist im Hinblick auf diejenigen ersten Grades schon erbracht. Daß es auch volleigentliche Darstellungen höheren Grades gibt — und diese Frage rückt durch die Ergebnisse des nächsten Paragraphen in den Vordergrund des Interesses — zeigen wir in § 6[41]); desgleichen erbringen wir dort den Nachweis, daß es nichtvollkommene Darstellungen gibt.

---

[40]) Aus (3. 26) folgt noch, da die rechte Seite ganzrational ist, daß $d_{\varrho'}(\Gamma, R)$ stets eine rationale Zahl ist.

[41]) Dieser Nachweis rechtfertigt gleichzeitig die Heranziehung des matrizentheoretischen Kalküls.

Eingegangen am 28. Mai 1955.

Struktur und Relationen allgemeiner Gaußscher Summen in endlichen Ringen. II*).

Von *Erich Lamprecht* in Würzburg.

§ 4. Reduktionen und echte volleigentliche Gaußsche Summen.

4. 1. Konjugierte Gaußsche Summen und Doppelsummen.

Wegen Satz 1′ können wir uns fortan auf die Untersuchung irreduzibler Gaußscher Summen beschränken[1]). Eine Beschränkung auf Komponentenringe werden wir nur dort machen, wo es die Zweckmäßigkeit erfordert, da die Begriffe Erklärungsmodul und Führer für allgemeine Ringe hergeleitet wurden und da es in einem halbprimären Komponentenring beim Übergang zu Restklassenringen sehr wohl passieren kann, daß diese Restklassenringe wieder eine direkte Summe mehrerer Komponentenringe sind. Die Ergebnisse werden jedoch im Hinblick auf die Sätze 1′ und 2 möglichst für den allgemeinen Fall formuliert.

Die nachfolgenden Reduktionen auf echte bzw. quasiechte und eigentliche Gaußsche Summen lehnen sich nicht ganz an diejenigen im kommutativen Spezialfall an (vgl. [7a, b]), denn insbesondere die Übertragung der ersten Reduktion führt im Nichtkommutativen zu rechnerischen Unschönheiten. Die hier angegebenen Reduktionen haben dagegen den Vorteil, beide aus ähnlichen Überlegungen zu folgen, nämlich aus Eigenschaften der konjugierten Gaußschen Summen und der Doppelsummen, die schon von H. L. Schmid an anderer Stelle mit Vorteil benutzt wurden[2]).

Es sei R ein endlicher Ring mit Einselement, in dem **(M)** erfüllt ist[3]) und

$$\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi)\, e[\xi]$$

eine irreduzible Gaußsche Summe in R; es bezeichne $\mathfrak{f}(\Gamma)$ den Führer der irreduziblen Multiplikativdarstellung $\Gamma(\xi)$ und $\mathfrak{r}_e$, $\mathfrak{l}_e$ bzw. $\mathfrak{b}_e$ die Erklärungsmoduln des Additivcharakters $e[\xi]$ von R. Ist $\eta \in \mathfrak{M}_R$, d. h. von der Form $\eta = 1 + \alpha$ mit quasiregulärem[4]) $\alpha \in R$, so betrachten wir die *zu* $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ *konjugierten Gaußschen Summen* $\tau(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R)$ bzw. $\tau(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R)$. Bei der Variablensubstitution $\eta\xi = \zeta$ bzw. $\xi\eta = \zeta$ folgen aus der Summendarstellung von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ und der ihrer Konjugierten die Identitäten

$$\begin{aligned} \tau(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R) &= \Gamma(\eta^{-1})\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R), \\ \tau(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R) &= \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)\, \Gamma(\eta^{-1}); \end{aligned} \tag{4. 1}$$

*) Habilitationsschrift Univ. Würzburg 1955.

[1]) Vgl. Teil I dieser Arbeit, dies. Journal 197 (1956), 1–26; Formeln und Sätze sind in beiden Teilen fortlaufend durchnumeriert.

[2]) Vgl. [10b]; wir werden hierauf in § 5 zurückkommen.

[3]) Vgl. **3. 1.**

[4]) Vgl. **3. 2.**

(4. 1) enthält folgendes hinreichende Kriterium für das Übereinstimmen der konjugierten Gaußschen Summen:

$$\tau(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R) = \tau(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R) = \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R), \quad \text{falls} \quad \eta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}(\Gamma)}. \tag{4. 2}$$

Da ${}_{1+\alpha}e[\xi] = e[\xi]$ für alle $\xi \in R$, falls $\alpha \in \mathfrak{r}_e$, und da $e_{1+\alpha}[\xi] = e[\xi]$ für alle $\xi \in R$, falls $\alpha \in \mathfrak{l}_e$, gilt entsprechend

$$\begin{aligned} &\tau(\Gamma, {}_{1+\alpha}e; \mathfrak{M}_R) = \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \text{ für } \alpha \in \mathfrak{r}_e, \\ &\tau(\Gamma, e_{1+\alpha}; \mathfrak{M}_R) = \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \text{ für } \alpha \in \mathfrak{l}_e\,^{5)}. \end{aligned} \tag{4. 3}$$

Ist $\mathfrak{g}$ ein beliebiger Modul in R (additive Gruppe), so verstehen wir gemäß **3. 2** unter $\mathfrak{M}_\mathfrak{g}$ die Gesamtheit der Elemente $\eta = 1 + \alpha$ mit quasiregulärem $\alpha \in \mathfrak{g}$. Wir betrachten dann die *Doppelsummen*

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_\mathfrak{g}) &= \sum_{\eta \in \mathfrak{M}_\mathfrak{g}} \tau(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R) = \sum_{\eta \in \mathfrak{M}_\mathfrak{g}} \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi)\, e[\eta\xi], \\ \Delta(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_\mathfrak{g}) &= \sum_{\eta \in \mathfrak{M}_\mathfrak{g}} \tau(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R) = \sum_{\eta \in \mathfrak{M}_\mathfrak{g}} \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi)\, e[\xi\eta]. \end{aligned} \tag{4. 4}$$

Wegen (4. 1) sind diese Doppelsummen in folgender Form darstellbar:

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_\mathfrak{g}) &= \Big(\sum_{\eta \in \mathfrak{M}_\mathfrak{g}} \Gamma(\eta^{-1})\Big) \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R), \\ \Delta(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_\mathfrak{g}) &= \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \Big(\sum_{\eta \in \mathfrak{M}_\mathfrak{g}} \Gamma(\eta^{-1})\Big); \end{aligned} \tag{4. 5}$$

ferner kann man sie auch folgendermaßen aufspalten:

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_\mathfrak{g}) &= \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi) \Big(\sum_{\eta \in \mathfrak{M}_\mathfrak{g}} e[\eta\xi]\Big), \\ \Delta(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_\mathfrak{g}) &= \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi) \Big(\sum_{\eta \in \mathfrak{M}_\mathfrak{g}} e[\xi\eta]\Big). \end{aligned} \tag{4. 6}$$

4. 2. Reduktionen auf quasiechte bzw. echte und eigentliche Gaußsche Summen.

Sei weiter $\Gamma(\xi)$ irreduzibel und $\mathfrak{f}(\Gamma)$, $e[\xi]$, $\mathfrak{b}_e$, $\mathfrak{r}_e$, $\mathfrak{l}_e$ wie in **4. 1** erklärt. Wir betrachten die Doppelsummen

$$\Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e}), \ \Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}) \text{ und } \Delta(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e}).$$

Wegen (4. 2) und (4. 4) ist

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e}) &= \Delta(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e}) = A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e})\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R), \\ \Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}) &= A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e})\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R), \\ \Delta(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e}) &= A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e})\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R). \end{aligned} \tag{4. 7}$$

Aus (4. 5) folgt dann in unserem Spezialfall zunächst

$$A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e})\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = \Big(\sum_{\eta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e}} \Gamma(\eta)\Big)\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R). \tag{4. 8}$$

Fall 1: $\mathfrak{f}(\Gamma) \gneqq \mathfrak{b}_e$. Es ist $\Gamma(\xi) \neq E_{l(\Gamma)}$ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e}$; da $\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{M}_R$ ist und $\Gamma(\xi)$ als irreduzibel vorausgesetzt war, ist $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e}) = 0$ wegen **1. 11**; nach (1. 8) ist also

$$\sum_{\xi \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e}} \Gamma(\xi) = 0_{l(\Gamma)}.$$

---

[5]) (4. 3) gilt auch, falls α nicht quasiregulär ist, und speziell auch, falls $\alpha \in \mathfrak{b}_e$ ist.

Dies in (4. 8) eingesetzt ergibt, da $A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e}) \neq 0$ ist,

$$\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = 0_{l(\Gamma)} \text{ für } \mathfrak{f}(\Gamma) \gneqq \mathfrak{b}_e. \tag{4. 9}$$

Fall 2: $\mathfrak{f}(\Gamma) \geqq \mathfrak{b}_e$. In diesem Fall induziert $e[\xi]$ einen Additivcharakter im Restklassenring $R_e = R/\mathfrak{b}_e$ und $\Gamma(\xi)$ eine Multiplikativdarstellung in R_e, die wieder mit den gleichen Symbolen bezeichnet werden. Einfache Rechnung ergibt folgende Reduktion von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ auf eine *quasiechte Gaußsche Summe im Restklassenring* R_e:

$$\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e})\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_{R_e}) = A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e}) \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_{R_e}} \Gamma(\xi)\, e[\xi] \text{ für } \mathfrak{f}(\Gamma) \geqq \mathfrak{b}_e. \tag{4. 10}$$

Ist speziell $e[\xi]$ ein symmetrischer Additivcharakter, d. h. $\mathfrak{r}_e = \mathfrak{l}_e = \mathfrak{b}_e$, so ist $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_{R_e})$ eine echte Gaußsche Summe in R_e.

Wegen (4. 9) und (4. 10) können wir uns auf die Untersuchung quasiechter irreduzibler Gaußscher Summen im Restklassenring $R_e = R/\mathfrak{b}_e$ beschränken. Es sei also $\mathfrak{b}_e = (0)$ und $\mathfrak{f}(\Gamma) \geqq (0)$. Wir wollen $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ auf eine quasiechte eigentliche Gaußsche Summe, d. h. den Fall $\mathfrak{f}(\Gamma) > (0)$ auf den Fall $\mathfrak{f}(\Gamma) = (0)$ zurückführen; wir beschränken uns dabei auf Komponentenringe R.

Fall I: *R habe ein Radikal* $\mathfrak{n} \neq (0)$ *und es sei* $\mathfrak{f}(\Gamma) > (0)$. Nach Lemma 6 aus § 3 ist $\mathfrak{f}'(\Gamma) = \mathfrak{f}(\Gamma) \cap \mathfrak{n} > (0)$. Wir betrachten die Doppelsumme $\Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}'(\Gamma)})$. Da $\mathfrak{f}(\Gamma) \geqq \mathfrak{f}'(\Gamma)$ ist, folgt aus (4. 1) und (4. 4)

$$\Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}'(\Gamma)}) = A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}'(\Gamma)})\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R); \tag{4. 11}$$

dabei ist $A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}'(\Gamma)}) = A_R(\mathfrak{f}'(\Gamma)) > 1$, da $\mathfrak{f}'(\Gamma) \neq (0)$ ein zweiseitiges im Radikal $\mathfrak{n}$ enthaltenes Ideal ist.

Aus (4. 6) und (4. 11) folgt

$$A_R(\mathfrak{f}'(\Gamma))\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi) \Big(\sum_{\eta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}'(\Gamma)}} e[\eta\xi] \Big). \tag{4. 12}$$

Stellt man die Elemente aus $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}'(\Gamma)}$ in der Form $\eta = 1 + \alpha$ mit $\alpha \in \mathfrak{f}'(\Gamma)$ dar, so kann man die inneren Summen der rechten Seite von (4. 12) folgendermaßen umformen:

$$\sum_{\eta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}'(\Gamma)}} e[\eta\xi] = e[\xi] \sum_{\alpha \in \mathfrak{f}'(\Gamma)} e[\alpha\xi]. \tag{4. 13}$$

Es ist $\mathfrak{b}_{e_\xi} = \mathfrak{b}_e = (0)$ für $\xi \in \mathfrak{M}_R$[6]); da weiter $\mathfrak{f}'(\Gamma) \neq (0)$ ist, haben alle Summen (4. 13) den Wert Null, denn es wird über einen Nichthauptcharakter der Additivgruppe $\mathfrak{f}'(\Gamma)$ summiert. Da $A_R(\mathfrak{f}'(\Gamma)) \neq 0$ ist, folgt hieraus und aus (4. 12)

$$\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = 0_{l(\Gamma)}, \text{ falls } \mathfrak{f}(\Gamma) > \mathfrak{b}_e = (0) \text{ ist} \tag{4. 14}$$

für Komponentenringe mit einem Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$.

Fall II: *R sei ein einfacher Ring und* $\mathfrak{f}(\Gamma) > (0)$. In diesem Fall ist notwendig $\mathfrak{f}(\Gamma) = R$, d. h. $\Gamma(\xi) = 1$ für alle $\xi \in \mathfrak{M}_R$, und es wird

$$\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} e[\xi], \text{ falls } R \text{ einfach und } \mathfrak{f}(\Gamma) = R \text{ ist.} \tag{4. 15}$$

Da jeder Komponentenring entweder einfach ist oder ein Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$ hat, ist somit die Reduktion irreduzibler quasiechter Gaußscher Summen auf die eigentlichen quasiechten Gaußschen Summen in Komponentenringen vollständig durchgeführt; die triviale Übertragung auf beliebige Ringe und nicht irreduzible Multiplikativdarstellungen geschieht mit Hilfe der Sätze 1′ und 2. Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen in

---

[6]) Vgl. (3. 11) und Lemma 1 aus § 3.

Satz 3. *Jede irreduzible Gaußsche Summe $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ in einem endlichen Ring R, in dem* **(M)** *gilt, läßt sich gemäß der Regel*

$$\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = \begin{cases} 0_{l(\Gamma)} & \text{für } \mathfrak{f}(\Gamma) \not\geqq \mathfrak{b}_e, \\ A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{b}_e})\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_{R_e}) & \text{für } \mathfrak{f}(\Gamma) \geqq \mathfrak{b}_e \end{cases}$$

auf eine quasiechte Gaußsche Summe $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_{R_e})$ in $R_e = R/\mathfrak{b}_e$ zurückführen; falls $e[\xi]$ ein symmetrischer Additivcharakter ist, ist $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_{R_e})$ sogar eine echte Gaußsche Summe. Eine irreduzible quasiechte nicht eigentliche Gaußsche Summe $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_{R_e})$ in einem Komponentenring R_e hat den Wert $0_{l(\Gamma)}$, falls R_e ein Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$ besitzt, und den Wert (4. 15), *falls R einfach ist. Hierdurch werden die symmetrischen auf die echten eigentlichen und die allgemeinen auf die quasiechten eigentlichen Gaußschen Summen zurückgeführt. Das Verhalten der Invarianten ist durch diese Regeln trivialerweise mitbestimmt.*

Dieser Satz 3 zeigt, daß fast alle Gaußschen Summen mit $\mathfrak{f}(\Gamma) \neq \mathfrak{b}_e$ — vom Ausnahmefall einfacher Komponenten abgesehen — singuläre Matrizen sind, nämlich die $l(\Gamma)$-reihige Nullmatrix. Dieser Ausnahmefall ließe sich mit einschließen, wenn man in Komponentenringen die irreduziblen quasiechten Gaußschen Summen folgendermaßen definiert:

$$\tau(\Gamma, e; R) = \sum_{\xi \in R} \Gamma(\xi)\, e[\xi], \tag{4. 16}$$

$$\text{wobei für } \xi \in \mathfrak{M}_R \text{ stets } \Gamma(\xi) = \begin{cases} 0_{l(\Gamma)}, & \text{für } \mathfrak{f}(\Gamma) \neq R, \\ 1\ , & \text{für } \mathfrak{f}(\Gamma) = R. \end{cases}$$

Man muß sich hierbei i. a. auf quasiechte Gaußsche Summen beschränken, da bei der Bildung $R_e = R/\mathfrak{b}_e$ im Nichtkommutativen neue Komponentenringe auftreten könnten. — Wir zeigen anschließend mit ähnlichen Überlegungen wie oben, daß auch die eigentlichen quasiechten aber nicht echten Gaußschen Summen singuläre Matrizen sind.

Es sei also $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ eine eigentliche quasiechte aber nicht echte Gaußsche Summe von R, d. h. $\mathfrak{f}(\Gamma) = \mathfrak{b}_e = (0)$ und $\mathfrak{r}_e > (0)$ sowie $\mathfrak{l}_e > (0)$. Dann gilt wegen (4. 5) und (4. 7) entsprechend (4. 8) die Regel für die Doppelsummen $\Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e})$ und $\Delta(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e})$:

$$\begin{aligned} A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e})\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) &= \Big(\sum_{\eta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}} \Gamma(\eta)\Big)\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R), \\ A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e})\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) &= \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \Big(\sum_{\eta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e}} \Gamma(\eta)\Big). \end{aligned} \tag{4. 17}$$

Sind $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}) < l(\Gamma)$ bzw. $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e}) < l(\Gamma)$ die gemäß **3. 5** eingeführten Identitätsindizes, so folgt wegen (1. 8) nach geeigneter Transformation der Darstellungsmatrizen (die identischen Komponenten von $\Gamma(\xi)$ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}$ bzw. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e}$ sollen am Anfang der Hauptdiagonalen stehen)

$$\sum_{\eta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}} \Gamma(\eta) = \begin{pmatrix} x_1 & & & 0 \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_{l(\Gamma)} \end{pmatrix} \text{ mit } x_i = \begin{cases} A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}), & (i = 1, \ldots, l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e})), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \tag{4. 18}$$

$$\sum_{\eta \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e}} \Gamma(\eta) = \begin{pmatrix} x_1 & & & 0 \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_{l(\Gamma)} \end{pmatrix} \text{ mit } x_i = \begin{cases} A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e}), & (i = 1, \ldots, l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e})), \\ 0 & \text{sonst}^{7)}. \end{cases}$$

---

[7]) Da $\Gamma(\xi)$ als eigentlich vorausgesetzt wurde, ist $A(\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}) > 1$ und $A(\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e}) > 1$.

Wegen (4. 17) und (4. 18) ist $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ eine singuläre Matrix; die Folgerungen hieraus für die Eigenwerte und die Norm der Gaußschen Summe fassen wir anschließend in einem Korollar zusammen.

(4. 18) gilt mit den gleichen $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e})$ bzw. $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e})$ auch für die zu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}$ bzw. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e}$ konjugierten Untergruppen und wegen (4. 1) übertragen sich die Aussagen somit auf alle zu $\tau(\bar{\Gamma}, e; \mathfrak{M}_R)$ rechts- bzw. linkskonjugierten Gaußschen Summen.

Korollar 1 zu Satz 3. *Ist $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ eine eigentliche quasiechte aber nicht echte Gaußsche Summe in R und ist $l_e(\Gamma) = \operatorname{Min}\left(l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}), l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e})\right)$, wobei $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e})$ bzw. $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_e})$ die Identitätsindizes bedeuten, so hat $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ höchstens $l_e(\Gamma)$ von Null verschiedene Eigenwerte $\left(l_e(\Gamma) < l(\Gamma)\right)$ und die Norm $|\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)|$ ist gleich Null. Das gleiche gilt für alle zu $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ konjugierten Gaußschen Summen.*

Ist wie oben $\mathfrak{f}(\Gamma) = \mathfrak{b}_e = (0)$, $\mathfrak{r}_e > (0)$ und $\mathfrak{l}_e > (0)$, und ist zusätzlich $\Gamma(\xi)$ volleigentlich, so ist $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}) = 0$ nach Definition 5. Wegen (4. 18) und (4. 17) wird dann

$$A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e})\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = 0_{l(\Gamma)} \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R), \text{ d. h. } \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = 0_{l(\Gamma)},$$

und wir erhalten

Korollar 2 zu Satz 3. *Ist $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ eine volleigentliche quasiechte aber nicht echte Gaußsche Summe, so ist $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = 0_{l(\Gamma)}$ und alle Eigenwerte von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$, sowie seine Norm und Spur sind gleich 0. Das gleiche gilt für alle zu $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ konjugierten Gaußschen Summen.*

Diese beiden Korollare zeigen, daß auch die quasiechten eigentlichen Gaußschen Summen weniger interessieren, da sie singuläre Matrizen sind; insbesondere sind die quasiechten volleigentlichen Gaußschen Summen als völlig trivial erkannt. Wir beschränken uns deshalb fortan auf die Untersuchung echter eigentlicher (bzw. volleigentlicher) Gaußscher Summen. Das hat zugleich den Vorteil, daß wir in dualen Ringen arbeiten können; der Einfachheit halber führen wir die Rechnungen i. a. in dualen Komponentenringen durch.

Unser Hauptinteresse wird dabei den Eigenwerten, Eigenpolynomen und Normen der Gaußschen Summen gelten, da diese Invarianten stets multiplikativ verknüpft werden, während die Spuren mehr additive Bildungen sind.

4. 3. Schema zur Bestimmung der absoluten Beträge der Eigenwerte und der Norm einer Gaußschen Summe.

Weitere Ergebnisse über die Singularität einer Gaußschen Summe erhält man durch Berechnung der absoluten Beträge ihrer Eigenwerte bzw. ihrer Norm; dazu benutzen wir den folgenden Sachverhalt:

Das Produkt einer komplexzahligen Matrix X mit ihrer konjugiert-komplex-transponierten Matrix $\bar{X}^*$ ist stets eine reellzahlige Matrix. Hat X den Rang ϱ, so haben auch $\bar{X}^*$ und $X\bar{X}^*$ den Rang ϱ[8]). Speziell folgt aus der Regularität von $X\bar{X}^*$ die von X, und der absolute Betrag der Determinante von X ist gleich der Wurzel aus dem absoluten Betrag der Determinante von $X\bar{X}^*$. Stets ist $|X\bar{X}^*| \geqq 0$.

Ist speziell

$$X\bar{X}^* = a \cdot E_{l(X)} \text{ mit } a > 0, \tag{4. 19}$$

[8]) Dies folgt durch einfache Rechnung beim Übergang zu geeigneten äquivalenten Matrizen.

so ist die zur Matrix $\frac{1}{\sqrt{a}} X$ ebenfalls konjugiert-komplex-transponierte Matrix $\frac{1}{\sqrt{a}} \bar{X}^*$ gleich ihrer Reziproken, d. h. $\frac{1}{\sqrt{a}} X$ ist eine unitäre Matrix. Gemäß **1. 1b** haben dann alle Eigenwerte von $\frac{1}{\sqrt{a}} X$ den Absolutbetrag 1 und da

$$(4.\ 20) \qquad \left| t \cdot E_{l(X)} - X \right| = a^{\frac{l(X)}{2}} \left| \frac{t}{\sqrt{a}} E_{l(X)} - \frac{X}{\sqrt{a}} \right|$$

ist, haben alle Eigenwerte von X den Absolutbetrag $\sqrt{a}$.

Bei der Untersuchung der Gaußschen Summen selbst gehen wir rechnerisch analog zum kommutativen Spezialfall vor.

Die Multiplikativdarstellung $\Gamma(\xi)$ sei unitär gewählt, d. h. gemäß (1. 3) sei $\Gamma(\xi)^{-1} = \overline{\Gamma(\xi)}^*$ für alle $\xi \in \mathfrak{M}_R$. Dann ist

$$(4.\ 21) \qquad \tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R) = \sum_{\eta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\eta^{-1})\, e[-\eta]$$

eine Gaußsche Summe mit gleichem Führer und Erklärungsmoduln wie $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$; da ferner ${}_{-1}e[\eta] = \overline{e[\eta]}$ für alle $\eta \in R$, ist $\tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)$ die zu $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ konjugiert-komplex-transponierte Matrix, denn diese Eigenschaft besitzen schon alle einzelnen Summanden. Wir bilden das Matrizenprodukt

$$(4.\ 22) \qquad \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)\, \tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R),$$

das eine reellzahlige Matrix ist.

Summationsumformungen gemäß

$$\begin{aligned}
\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)\, \tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R) &= \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi)\, e[\xi] \sum_{\eta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\eta^{-1})\, e[-\eta] \\
&= \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \sum_{\eta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi\eta^{-1})\, e[\xi - \eta] = \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_R} \sum_{\eta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\zeta)\, e[(\zeta - 1)\, \eta] \\
&= \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\zeta) \sum_{\eta \in R} e[(\zeta - 1)\, \eta] - \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\zeta) \sum_{\substack{\eta \in R \\ \eta \notin \mathfrak{M}_R}} e[(\zeta - 1)\, \eta]
\end{aligned}$$

und Auswertung einfacher Charaktersummen des Additivcharakters ergeben die Regel

$$(4.\ 23) \qquad \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)\, \tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R) = \begin{cases} \Gamma(1)\, N((0)) - \Lambda, & \text{falls } e[\xi] \text{ echt ist,} \\ N((0)) \sum\limits_{\xi \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_e}} \Gamma(\xi) - \Lambda, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit der Restsumme

$$(4.\ 24) \qquad \Lambda = \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\zeta) \sum_{\substack{\eta \in R \\ \eta \notin \mathfrak{M}_R}} e[(\zeta - 1)\, \eta]\,;$$

hierbei bedeutet $N((0)) = A(R)$ die Restklassenanzahl nach dem Nullideal von R, d. h. die Anzahl der verschiedenen Elemente von R.

Das Problem der Auswertung von (4. 23) besteht in der Hauptsache darin, einen einfachen Ausdruck für die Restsumme Λ in (4. 24) anzugeben. Diese Restsumme Λ hat große Ähnlichkeit mit den früher eingeführten Doppelsummen, denn bei Summationsvertauschung in (4. 24) erhält man

$$(4.\ 25) \qquad \Lambda = \sum_{\eta \in R,\ \eta \notin \mathfrak{M}_R} \tau(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R)\, e[-\eta].$$

4. 4. Echte volleigentliche Gaußsche Summen.

Es sei $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ eine echte volleigentliche Gaußsche Summe in einem (notwendig dualen) Ring R, und $\Gamma(\xi)$ sei unitär gewählt. Wir gehen analog **4. 3** vor und werten die Restsumme Λ in der Form (4. 25) aus. Da $\eta \notin \mathfrak{M}_R$ ist, ist jede in (4. 25) vorkommende Gaußsche Summe $\tau(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R)$ zwar volleigentlich aber niemals echt; wegen Satz 3 und Korollar 2 zu Satz 3 ist somit jede dieser Gaußschen Summen gleich $0_{l(\Gamma)}$ und folglich ist auch $\Lambda = 0_{l(\Gamma)}$. Dies in (4. 23) eingesetzt ergibt

$$\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)\, \tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R) = N((0)) \cdot E_{l(\Gamma)}\,^{9)}. \tag{4. 26}$$

Aus den Bemerkungen in **4. 3**, insbesondere (4. 19) und (4. 20), folgt dann, daß alle Eigenwerte von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ ganzalgebraische Zahlen vom Absolutbetrag $\sqrt{N((0))}$ (Wurzel aus der Elementanzahl des Ringes) sind; die Norm oder Invariante 2. Art von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ ist eine ganzalgebraische Zahl vom Absolutbetrag $\sqrt{N((0))}^{l(\Gamma)}$.

Da die Matrizen $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ und $\tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)$ zueinander konjugiert-komplex-transponiert sind, haben die Eigenpolynome $F(t; \Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ und $F(t; \Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)$ konjugiert-komplexe Koeffizienten und folglich entstehen die Eigenwerte von $\tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)$ aus denen von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$, indem man zu den konjugiert-komplexen Zahlen übergeht.

Weiter folgt aus (4. 26) eine Funktionalgleichung der Eigenpolynome der echten volleigentlichen Gaußschen Summen:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{N((0))}{t}; \Gamma, e; \mathfrak{M}_R\right) &= \left| \frac{N((0))}{t} \cdot E_{l(\Gamma)} - \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \right| \\ &= |\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)| \left| \frac{1}{t}\, \tau(^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R) - E_{l(\Gamma)} \right| \\ &= |\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)| \left(\frac{-1}{t}\right)^{l(\Gamma)} \cdot F(t; \Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R). \end{aligned} \tag{4. 27}$$

Diese Funktionalgleichung ist vom gleichen Typus wie die der L-Funktionen in algebraischen Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper.

Satz 4. *Jede echte volleigentliche Gaußsche Summe $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ in einem dualen Ring R ist eine reguläre Matrix, deren Norm (Invariante 2. Art) den Absolutbetrag $\sqrt{N((0))}^{l(\Gamma)}$ ($N((0))$-Elementenzahl des Ringes R) hat; ihre Eigenwerte $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)_\lambda$ ($\lambda = 1, \ldots, l(\Gamma)$) sind ganzalgebraische Zahlen vom Betrag $\sqrt{N((0))}$ und ihr Eigenpolynom genügt der Funktionalgleichung*

$$F\left(\frac{N((0))}{t}; \Gamma, e; \mathfrak{M}_R\right)(-t)^{l(\Gamma)} = |\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)|\, F(t; \Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R). \tag{4. 28}$$

Die Invarianten der ebenfalls echten volleigentlichen Gaußschen Summe $\tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)$ sind die zu denen von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ konjugiert-komplexen Bildungen.

Hiermit ist die Struktur der vollkommenen Gaußschen Summen vollständig beschrieben; sie lassen sich stets auf echte volleigentliche Gaußsche Summen zurückführen. Die letzteren sind nicht singulär und haben Eigenschaften, die denen der Gaußschen Summen in kommutativen Ringen entsprechen. Daß sie der einzige wesentliche Typus sind, wird durch Erledigung der noch offenen Fälle in **4. 5** bestätigt. Daß sich auch Relationen und ähnliche Eigenschaften der Gaußschen Summen im Kommutativen auf die echten volleigentlichen Gaußschen Summen übertragen, wird in § 5 gezeigt, während in § 6 der durch (4. 28) nahegelegte Nachweis für die Existenz volleigentlicher Multiplikativdarstellungen höheren Grades erbracht wird.

---

[9]) Ein zweiter Beweis hierfür folgt auch aus anderen Untersuchungen in **4. 5.**

4. 5. Echte eigentliche Gaußsche Summen.

Wir beschränken uns auf irreduzible echte eigentliche Gaußsche Summen $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ in dualen Komponentenringen R und untersuchen zunächst den Fall, in dem R ein Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$ besitzt.

Es sei $\mathfrak{N}_1$ ein festes Vertretersystem der mod $\mathfrak{n}$ verschiedenen Nullteiler von R. Da alle $\beta \in \mathfrak{n}$ quasiregulär sind, ist jedes $\eta \in R$ mit $\eta \notin \mathfrak{M}_R$ in der Form $\eta = \alpha + \beta$ ($\alpha \in \mathfrak{N}_1$, $\beta \in \mathfrak{n}$) darstellbar. Dem entspricht die folgende Summationsaufspaltung der Restsumme Λ aus (4. 24):

$$\Lambda = \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\zeta) \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}_1} e[(\zeta - 1)\,\alpha] \sum_{\beta \in \mathfrak{n}} e[(\zeta - 1)\,\beta];$$

aus den Charakterrelationen (beachte § 3, Lemma 6, (3. 18))

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{n}} e[(\zeta - 1)\,\beta] = \begin{Bmatrix} 0 & , \text{ falls } \zeta \not\equiv 1 \bmod \mathfrak{n}_r \\ \dfrac{N((0))}{N(\mathfrak{n})}, & \text{falls } \zeta \equiv 1 \bmod \mathfrak{n}_r \end{Bmatrix}$$

folgt somit

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{N((0))}{N(\mathfrak{n})} \sum_{\zeta \equiv 1 \bmod \mathfrak{n}_r} \Gamma(\zeta) \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}_1} e[(\zeta - 1)\,\alpha] \\ &= \frac{N((0))}{N(\mathfrak{n})} \sum_{\gamma \in \mathfrak{n}_r} \Gamma(1 + \gamma) \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}_1} e[\gamma\alpha]. \end{aligned} \tag{4. 29}$$

Da $e[\xi]$ echt ist, kann wegen (3. 21) und (3. 22) (vgl. den Beweis von Lemma 7 in § 3) $\Gamma(\xi)$ unitär so gewählt werden, daß für alle $\gamma \in \mathfrak{n}_r$

$$\Gamma(1 + \gamma) = \begin{pmatrix} e[\gamma\delta_1] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e[\gamma\delta_{l(\Gamma)}] \end{pmatrix} \quad (\delta_i \in R \text{ für } i = 1, \ldots, l(\Gamma)), \tag{4. 30}$$

d. h. daß alle diese Darstellungsmatrizen Diagonalmatrizen der angegebenen Form sind. Somit wird aus (4. 29) nach Vertauschung der Summationen

$$\Lambda = \frac{N((0))}{N(\mathfrak{n})} \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}_1} \begin{pmatrix} \sum\limits_{\gamma \in \mathfrak{n}_r} e[\gamma(\delta_1 + \alpha)] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum\limits_{\gamma \in \mathfrak{n}_r} e[\gamma(\delta_{l(\Gamma)} + \alpha)] \end{pmatrix}. \tag{4. 31}$$

Für die inneren Summen, d. h. die Charaktersummen auf der Matrizenhauptdiagonalen gilt

$$\sum_{\gamma \in \mathfrak{n}_r} e[\gamma(\delta_i + \alpha)] = \begin{Bmatrix} 0 & , \text{ falls } \delta_i + \alpha \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{n} \\ N(\mathfrak{n}), & \text{falls } \delta_i + \alpha \equiv 0 \bmod \mathfrak{n} \end{Bmatrix}. \tag{4. 32}$$

Ist nun $\Gamma(\xi)$ volleigentlich, so sind alle $\delta_i \in \mathfrak{M}_R$, also ist stets $\delta_i + \alpha \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{n}$, da alle $\alpha \in \mathfrak{N}_1$ sind; d. h. alle inneren Summen in (4. 31) sind gleich Null und Λ ist gleich $0_{l(\Gamma)}$.

Ist dagegen $\Gamma(\xi)$ nicht volleigentlich, so können alle δ_i von (4. 30) aus $\mathfrak{N}_1$ gewählt werden, und die gleiche Überlegung wie eben zeigt: Jeweils eine innere Summe, nämlich die zum Parameterwert $\alpha = -\delta_i$, nimmt den unteren Wert aus (4. 32) an, während alle anderen gleich 0 sind. Da die äußere Summe eine Summe von Diagonalmatrizen ist, folgt somit:

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} 0_{l(\Gamma)} & , \text{ falls } \Gamma(\xi) \text{ volleigentlich ist,} \\ N((0))\, E_{l(\Gamma)}, & \text{falls } \Gamma(\xi) \text{ nicht volleigentlich ist.} \end{Bmatrix}$$

Dies in (4. 23) eingesetzt ergibt, da $e[\xi]$ echt und $\Gamma(1) = E_{l(\Gamma)}$ ist, für jede echte eigentliche Gaußsche Summe $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ in einem Komponentenring R mit einem Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$[10]:

$$(4.\,33) \qquad \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)\, \tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R) = \begin{Bmatrix} N((0))\, E_{l(\Gamma)}, & \text{falls } \Gamma \text{ volleigentlich ist} \\ 0_{l(\Gamma)}, & \text{sonst} \end{Bmatrix}.$$

Im Fall der echten eigentlichen aber nicht volleigentlichen Gaußschen Summen $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ ist nach (4. 33) das Matrizenprodukt $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)\, \tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R) = 0_{l(\Gamma)}$, hat also den Rang Null; nach **4. 3** haben somit schon die beiden konjugiert-komplex-transponierten Faktoren den Rang Null, d. h. es ist $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = \tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R) = 0_{l(\Gamma)}$. Folglich sind alle Eigenwerte und somit auch die Norm und die Spur dieser Gaußschen Summe gleich 0.

Korollar 1 zu Satz 4. *Ist $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ eine echte eigentliche aber nicht volleigentliche Gaußsche Summe in einem (dualen) Komponentenring R mit einem Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$, so ist $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = 0_{l(\Gamma)}$, und alle Eigenwerte sowie die Norm und die Spur von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ sind gleich Null; das gleiche gilt dann auch für $\tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)$.*

Es sei jetzt $R = k_{rr}$ ein einfacher Komponentenring und $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ eine irreduzible echte eigentliche Gaußsche Summe von R, wobei $\Gamma(\xi)$ wieder unitär gewählt sei. Dann läßt sich die Restsumme Λ aus (4. 24) entsprechend (3. 20) bzw. (3. 23) zunächst folgendermaßen umformen:

$$(4.\,34) \qquad \Lambda = \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\zeta) \left\{ \sum_{\nu=0}^{r-1} a_{r-1,\nu}(R) \sum_{\substack{\mathfrak{r}_\nu \text{ mit} \\ \varrho(\mathfrak{r}_\nu) = \nu}} \sum_{\eta \in \mathfrak{r}_\nu} e[(\zeta - 1)\, \eta] \right\}.$$

Nun ist aber

$$(4.\,35) \qquad \sum_{\eta \in \mathfrak{r}_\nu} e[(\zeta - 1)\, \eta] = \begin{Bmatrix} A_R(\mathfrak{r}_\nu), & \text{falls } \zeta - 1 \in (\mathfrak{r}_\nu)_l \\ 0 \quad , & \text{falls } \zeta - 1 \notin (\mathfrak{r}_\nu)_l \end{Bmatrix}.$$

Da $\zeta - 1 \in (\mathfrak{r}_\nu)_l$ für $\zeta \in \mathfrak{M}_R$ gleichbedeutend damit ist, daß $\zeta \in \mathfrak{M}_{(\mathfrak{r}_\nu)_l}$, erhalten wir aus (4. 34) bei Ausführung der innersten Summation und anschließender Summationsvertauschung

$$(4.\,36) \qquad \Lambda = \sum_{\nu=0}^{r-1} a_{r-1,\nu}(R)\, A_R(\mathfrak{r}_\nu) \sum_{\substack{\mathfrak{r}_\nu \text{ mit} \\ \varrho(\mathfrak{r}_\nu) = \nu}} \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_{(\mathfrak{r}_\nu)_l}} \Gamma(\zeta).$$

Aus (4. 36) sieht man einerseits, daß der Wert von Λ unabhängig von der speziellen Auswahl des echten Additivcharakters $e[\xi]$ ist, und andererseits analog zu (3. 24), daß Λ eine Skalarmatrix ist, d. h.

$$(4.\,37) \qquad \Lambda = E_{l(\Gamma)} \cdot d^*(\Gamma, R) \qquad (d^*(\Gamma, R) = \text{komplexe Zahl}).$$

Jedes $(\mathfrak{r}_\nu)_l$ ist ein Linksideal vom Rang $r - \nu$; aus der Dualität von R folgt, daß man einerseits mit allen Rechtsidealen $\mathfrak{r}_\nu$ vom Rang ν in der Form $(\mathfrak{r}_\nu)_l$ alle Linksideale vom Rang $r - \nu$ von R erhält und daß andererseits $b_\nu(R) = b_{r-\nu}(R)$ gilt, für die vor (3. 26) erklärten Anzahlen $b_\nu(R)$, der Rechts- bzw. Linksideale vom Rang ν. Folglich wird bei Spurbildung wegen (3. 25) analog (3. 26) aus (4. 36) und (4. 37)

$$(4.\,38) \qquad d^*(\Gamma, R) = \frac{1}{l(\Gamma)} \sum_{\nu=0}^{r-1} a_{r-1,\nu}(R)\, A_R(\mathfrak{r}_\nu)\, b_\nu(R)\, l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_{r-\nu}})\, A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_{r-\nu}}),$$

d. h. $d^*(\Gamma, R)$ ist eine rationale Zahl, die höchstens den Nenner $l(\Gamma)$ hat.

---

[10]) Dieses Ergebnis enthält im betrachteten Spezialfall einen zweiten Beweis für (4. 26).

Ist speziell $\Gamma(\xi)$ volleigentlich, so sind alle $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_{r-\nu}}) = 0$, d. h. auch $d^*(\Gamma, R) = 0$, woraus $\Lambda = 0_{l(\Gamma)}$ folgt; dies bestätigt (4. 26) in diesem Spezialfall[11]).

Da stets $l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_{r-\nu}}) = l(\Gamma^{-1}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_{r-\nu}})$ und $l(\Gamma, \mathfrak{M}_R) = 0$ ist (Γ sollte eigentlich sein), erhält man aus (4. 37), (4. 38) und (4. 23)

$$(4.\,39)\qquad \begin{aligned}\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)\,\tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R) &= \tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)\,\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)\\ &= E_{l(\Gamma)}(A(R) - d^*(\Gamma, R))\end{aligned}$$

mit

$$d^*(\Gamma, R) = \frac{1}{l(\Gamma)} \sum_{\nu=1}^{r-1} a_{r-1,\nu}(R)\, A_R(\mathfrak{r}_\nu)\, b_\nu(R)\, A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_{r-\nu}})\, l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_{r-\nu}}),$$

d. h. das Produkt dieser Gaußschen Summen ist erstens vertauschbar und zweitens eine Skalarmatrix. Somit ist der absolute Betrag der Normen von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ und $\tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)$ gleich $|(A(R) - d^*(\Gamma, R))|^{\frac{l(\Gamma)}{2}}$. Wegen **1. 1f** sind die Eigenwerte von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ und $\tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)$ so numeriert, daß jeweils $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)_\lambda\, \tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)_\lambda = A(R) - d^*(\Gamma, R)$, d. h. eine rationale Zahl ist; somit sind jeweils alle Eigenwerte gleich oder ungleich Null, je nachdem $A(R) - d^*(\Gamma, R) = 0$ ist oder nicht. Ist sogar $A(R) - d^*(\Gamma, R) \geqq 0$, so haben (vgl. **4. 3**) alle Eigenwerte den Absolutbetrag $\sqrt{A(R) - d^*(\Gamma, R)}$. Dieser letztere Fall liegt stets dann vor, wenn $l(\Gamma)$ ungerade ist, denn dann muß $(A(R) - d^*(\Gamma, R))^{l(\Gamma)}$ als Norm zweier konjugiert-komplex-transponierter Matrizen positiv sein; in diesem Fall ist also $A(R) \geqq d^*(\Gamma, R)$.

Wir erläutern diese Ergebnisse und insbesondere (4. 39) am Beispiel des 2-reihigen Matrizenringes über einem Galoisfeld k von q Elementen: Dann ist $A(R) = q^4$, $A_R(\mathfrak{r}_1) = q^2$, $A_R(\mathfrak{M}_{\mathfrak{l}_1}) = (q-1)\,q$, $b_1(R) = q + 1$ und $a_{1,1}(R) = 1$; also ist

$$(4.\,40)\qquad A(R) - d^*(\Gamma, R) = q^4 - q^3(q-1)(q+1)\frac{l(\Gamma, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1})}{l(\Gamma)}.$$

In diesem Fall ist $A(R) - d^*(\Gamma, R) = q^4$ dann und nur dann, wenn Γ volleigentlich ist; dies zeigt, daß auch in einfachen Ringen die Absolutbeträge der Eigenwerte und Norm nicht volleigentlicher Gaußscher Summen i. a. von denen volleigentlicher abweichen.

Korollar 2 zu Satz 4. *Ist $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ eine irreduzible echte aber nicht volleigentliche Gaußsche Summe in einem einfachen Ring R, so hat ihre Norm den Absolutbetrag $|A(R) - d^*(\Gamma, R)|^{\frac{l(\Gamma)}{2}}$ ($d^*(\Gamma, R)$ gemäß (4. 39)); ihre Eigenwerte sind entweder alle gleich Null oder alle ungleich Null und es ist stets $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)_\lambda\, \tau(\Gamma^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)_\lambda = A(R) - d^*(\Gamma, R)$; falls $A(R) - d^*(\Gamma, R) \geqq 0$ ist, speziell also für alle Multiplikativdarstellungen ungeraden Grades, haben alle Eigenwerte den Absolutbetrag $\sqrt{A(R) - d^*(\Gamma, R)}$[12]). Die Absolutbeträge der Eigenwerte sind i. a. — speziell stets in 2-reihigen Matrizenringen — von denen volleigentlicher echter Gaußscher Summen verschieden.*

Mit diesen Hinweisen auf die Abweichungen vom Normalfall der echten volleigentlichen Gaußschen Summen wollen wir uns hier begnügen, da eine Anwendbarkeit der nicht volleigentlichen Gaußschen Summen bis jetzt nicht bekannt ist. In § 6 geben wir noch ein Beispiel dafür an, daß im Unterschied zu Komponentenringen mit Radikal in einfachen Ringen die nicht volleigentlichen Gaußschen Summen nicht gleich $0_{l(\Gamma)}$ zu sein brauchen.

---

[11]) Die hier angegebene Schlußweise ließe sich auch auf duale Komponentenringe mit Radikal übertragen, indem man ein Analogon zu (3. 20) herleitet, doch ist der vorangestellte Beweis für diesen Fall wesentlich kürzer.

[12]) Falls zusätzlich $A(R) - d^*(\Gamma, R) \neq 0$ ist, genügen die Eigenpolynome einer (4. 28) entsprechenden modifizierten Funktionalgleichung.

§ 5. Relationen mit echten volleigentlichen Gaußschen Summen.

5. 1. Der H. L. Schmidsche Darstellungssummensatz.

Zur Herleitung dieser von H. L. Schmid[13]) in einem Spezialfall bewiesenen Beziehung zwischen verschiedenen Darstellungssummen, gehen wir von folgendem Sachverhalt aus:

Es sei zunächst R ein dualer endlicher Ring, in dem **(M)** erfüllt ist, $e[\xi]$ ein echter Additivcharakter und $\Gamma(\xi)$ eine eigentliche Multiplikativdarstellung von R; wir gehen dann von folgender Modifikation der in (4. 4) eingeführten Doppelsummen aus:

$$\Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{g}) = \sum_{\eta \in \mathfrak{g}} \sum_{\xi \in R} \Gamma(\xi)\, e[\eta\xi], \tag{5. 1}$$
$$\Delta(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{g}) = \sum_{\eta \in \mathfrak{g}} \sum_{\xi \in R} \Gamma(\xi)\, e[\xi\eta];$$

hierbei sei $\Gamma(\xi) = 0_{l(\Gamma)}$ und $\Gamma^{-1}(\xi) = 0_{l(\Gamma)}$ für $\xi \notin \mathfrak{M}_R$ und $\mathfrak{g}$ ein beliebiger Modul (Additivgruppe) in R[14]).

Beachtet man die Definition des vorderen bzw. hinteren bzgl. $e[\xi]$ dualen Moduls ${}_e\bar{\mathfrak{g}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{g}}_e$ von $\mathfrak{g}$ (vgl. § 3, S. 14 und [7c], S. 367), so folgen die Charakterrelationen

$$\sum_{\eta \in \mathfrak{g}} e[\gamma\eta] = \begin{cases} 0 & \text{für } \gamma \notin {}_e\bar{\mathfrak{g}} \\ A_R(\mathfrak{g}) & \text{für } \gamma \in {}_e\bar{\mathfrak{g}} \end{cases}, \tag{5. 2}$$
$$\sum_{\eta \in \mathfrak{g}} e[\eta\gamma] = \begin{cases} 0 & \text{für } \gamma \notin \bar{\mathfrak{g}}_e \\ A_R(\mathfrak{g}) & \text{für } \gamma \in \bar{\mathfrak{g}}_e \end{cases}.$$

Führt man für einen beliebigen Modul $\mathfrak{g}$ unter Beachtung der Festsetzung $\Gamma^{-1}(\xi) = \Gamma(\xi) = 0_{l(\Gamma)}$ für $\xi \notin \mathfrak{M}_R$ die Darstellungssummen

$$\Lambda(\Gamma; \mathfrak{g}) = \sum_{\xi \in \mathfrak{g}} \Gamma(\xi) \tag{5. 3}$$

ein, so wird aus (5. 1) unter Beachtung von (5. 2) zunächst

$$\Delta(\Gamma, {}_\eta e; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{g}) = A_R(\mathfrak{g})\, \Lambda(\Gamma; {}_e\bar{\mathfrak{g}}), \tag{5. 4}$$
$$\Delta(\Gamma, e_\eta; \mathfrak{M}_R, \mathfrak{g}) = A_R(\mathfrak{g})\, \Lambda(\Gamma; \bar{\mathfrak{g}}_e).$$

Ist speziell $\Gamma(\xi)$ eine volleigentliche Multiplikativdarstellung, dann ist wegen Korollar 2 zu Satz 3 und unserer obigen Festsetzung

$$\sum_{\xi \in R} \Gamma(\xi)\, e[\eta\xi] = \sum_{\xi \in R} \Gamma(\xi)\, e[\xi\eta] = 0_{l(\Gamma)}, \quad \text{falls } \eta \notin \mathfrak{M}_R,$$

also gilt für volleigentliche echte Gaußsche Summen die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} \tau(\Gamma, {}_\eta e; R) &= \Gamma^{-1}(\eta)\, \tau(\Gamma, e; R) \\ \tau(\Gamma, e_\eta; R) &= \tau(\Gamma, e; R)\, \Gamma^{-1}(\eta) \end{aligned}\right\} \text{ für alle } \eta \in R. \tag{5. 5}$$

Hieraus folgt für (5. 1) die Darstellung

$$\Delta(\Gamma, {}_\eta e; R, \mathfrak{g}) = \Lambda(\Gamma^{-1}, \mathfrak{g})\, \tau(\Gamma, e; R), \tag{5. 6}$$
$$\Delta(\Gamma, e_\eta; R, \mathfrak{g}) = \tau(\Gamma, e; R)\, \Lambda(\Gamma^{-1}, \mathfrak{g}).$$

Zusammen aus (5. 4) und (5. 6) folgt dann der

---

[13]) Vgl. [10b], S. 89.

[14]) Es wird also über eine additive Gruppe summiert, während in (4. 4) die zweite Summation über eine Einheitengruppe lief; die Summation über R statt über $\mathfrak{M}_R$ bedeutet bei obiger Festsetzung $\Gamma(\xi) = 0_{l(\Gamma)}$ für $\xi \notin \mathfrak{M}_R$ keine Einschränkung.

Satz 5 (H. L. Schmidscher Darstellungssummensatz). *Ist R ein dualer Ring, $e[\xi]$ ein echter Additivcharakter, $\Gamma(\xi)$ eine volleigentliche Multiplikativdarstellung von R und $\mathfrak{g}$ ein beliebiger Modul in R, dann gelten stets die Darstellungssummenbeziehungen*

$$(5.7)\qquad \begin{aligned} A(\mathfrak{g})\,\Lambda(\Gamma;\,{}_e\bar{\mathfrak{g}}) &= \Lambda(\Gamma^{-1};\,\mathfrak{g})\,\tau(\Gamma,e;\,\mathfrak{M}_R),\\ A(\mathfrak{g})\,\Lambda(\Gamma;\,\bar{\mathfrak{g}}_e) &= \tau(\Gamma,e;\,\mathfrak{M}_R)\,\Lambda(\Gamma^{-1};\,\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Da die hier angegebene Fassung des Darstellungssummensatzes nicht nur wesentlich allgemeiner ist, sondern auch etwas andere Begriffsbildungen verwendet werden, als in dem bei H. L. Schmid (vgl. [10b], S. 89) bewiesenen Spezialfall, geben wir noch die Zusammenhänge zwischen beiden Fassungen an.

Dazu setzen wir zusätzlich voraus, daß der duale Ring R eine Algebra über einem Galoisfeld k von q Elementen ist; diese Aussage ist damit gleichbedeutend, daß R die Charakteristik p hat, wo p die in q aufgehende Primzahl ist[15]). Wir bezeichnen mit $e^*(x)$ den normierten Additivcharakter von k, d. h.

$$(5.8)\qquad e^*(x) = e^{\frac{2\pi i}{p}S(x)}$$

($S(x)$ die Absolutspur von k nach seinem Primkörper);

jeder echte Additivcharakter von R läßt sich dann in der folgenden Form schreiben:

$$(5.9)\qquad e[\xi] = e^*(s[\xi]),\ s[\xi] \text{ echte lineare Funktion von } R/k;$$

der spezielle echte Additivcharakter $e[\xi]$ von R bestimmt umkehrbar eindeutig die echte lineare Funktion $s[\xi]$ von R über k [16]). Ferner setzen wir voraus, daß der Modul $\mathfrak{g}$ stets ein k-Modul aus R sei; dann ist also $A_R(\mathfrak{g}) = q^{r(\mathfrak{g}/k)}$.

Da wegen der Dualität von R bei der Festsetzung (5. 9) der vordere bzgl. $e[\xi]$ duale Modul mit dem vorderen bzgl. $s[\xi]$ dualen Modul von $\mathfrak{g}$ übereinstimmt, d. h.

$$(5.10)\qquad {}_e\bar{\mathfrak{g}} = {}_s\bar{\mathfrak{g}} \text{ und entsprechend } \bar{\mathfrak{g}}_e = \bar{\mathfrak{g}}_s$$

ist, folgt aus Satz 5 das

Korollar 1 zu Satz 5. *Ist R eine duale Algebra über k, $\Gamma(\xi)$ eine volleigentliche Multiplikativdarstellung von R und $e[\xi] = e^*(s[\xi])$ ein echter Additivcharakter von R, wobei $s[\xi]$ eine echte lineare Funktion von R über k und $e^*(x)$ gemäß* (5. 8) *erklärt ist, so gelten für jeden k-Modul $\mathfrak{g}$ von R die Charaktersummenbeziehungen*

$$(5.11)\qquad \begin{aligned} q^{r(\mathfrak{g}/k)}\Lambda(\Gamma;\,{}_s\bar{\mathfrak{g}}) &= \Lambda(\Gamma^{-1};\,\mathfrak{g})\,\tau(\Gamma,e;\,\mathfrak{M}_R),\\ q^{r(\mathfrak{g}/k)}\Lambda(\Gamma;\,\bar{\mathfrak{g}}_s) &= \tau(\Gamma,e;\,\mathfrak{M}_R)\,\Lambda(\Gamma^{-1};\,\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Dieses Korollar ist selbst unter den obigen Voraussetzungen über R eine Abschwächung von Satz 5, da wir uns auf k-Moduln $\mathfrak{g}$ beschränkt haben. Setzt man von der dualen Algebra R noch zusätzlich voraus, daß sie ein kommutativer Hauptidealring ist und daß $\Gamma(\xi)$ irreduzibel (d. h. ein abelscher Multiplikativcharakter) ist, so wird aus dem obigen Korollar die Aussage des von H. L. Schmid bewiesenen Satzes; dieser Satz ist das wesentliche Hilfsmittel zum Beweis der Funktionalgleichung der abelschen L-Funktionen in Funktionenkörpern einer Veränderlichen mit endlichem Konstantenkörper[17]). Allerdings hat die Formel (5. 11) gegenüber der H. L. Schmidschen Fassung den Vorteil, daß sie Nichtinvarianz der Beziehung, d. h. die Abhängigkeit von der Auswahl einer echten linearen Funktion $s[\xi]$, die ja i. a. keineswegs eindeutig bestimmbar ist, deutlich aufzeigt[18]).

---

[15]) Falls R die Charakteristik p hat, gilt dies auch für das Zentrum Z von R. In einem kommutativen Ring der Charakteristik p existiert aber stets ein die Eins enthaltendes maximales Galoisfeld k, über dem der Ring eine Algebra ist (Durchschnitt der entsprechenden Galoisfelder der Komponentenringe), und über diesem Galoisfeld ist auch der Gesamtring R eine Algebra. — Die umgekehrte Richtung ist trivialerweise erfüllt.

[16]) Vgl. hierzu [7c], insbesondere S. 381.

[17]) Dies legt die Vermutung nahe, daß unser allgemeiner Satz für den Beweis der Funktionalgleichung von L-Funktionen in hyperkomplexen Systemen über solchen Körpern von gleicher Bedeutung ist.

[18]) Vgl. [10b]; die Ungenauigkeit oder besser die Nichtinvarianz der H. L. Schmidschen Fassung liegt darin, daß die Abhängigkeit von der Konstruktion (nämlich der Auswahl eines Systems von Primelementen t_ϱ) nicht vermerkt ist.

5. 2. Verallgemeinerte Jacobische Summen.

Jacobische Summen in Galoisfeldern wurden in den letzten Jahren hauptsächlich von H. Davenport-H. Hasse (vgl. [5c]) und A. Weil (vgl. [13a, b]) untersucht; dabei wurde ihre Bedeutung für verschiedene arithmetische Fragen in der Theorie der L-Funktionen nachgewiesen. Die Definition der 2-gliedrigen Jacobischen Summen in einem Galoisfeld k lautet:

$$J(\chi, \psi; k) = \sum_{x \in k} \chi(x)\, \psi(1-x) = \frac{\tau(\chi)\, \tau(\psi)}{\tau(\chi\psi)} \tag{5. 12}$$

(χ, ψ und $\chi\psi$ eigentliche Multiplikativcharaktere von k);

sie lassen sich in der angegebenen Form durch normierte, d. h. jeweils mit dem normierten Additivcharakter $e^*(x)$ von k (vgl. (5. 8)) gebildete, Gaußsche Summen $\tau(\chi)$, $\tau(\psi)$, $\tau(\chi\psi)$ von k ausdrücken. Die n-gliedrigen Jacobischen Summen und desgleichen solche mit Parametern lassen sich durch einfache Umrechnung auf den Typus (5. 12) zurückführen.

Wir wollen ein Analogon dieser Bildung in allgemeinen dualen endlichen Ringen untersuchen. Es seien R ein dualer Ring, in dem **(M)** gilt, $e[\xi]$ ein fester echter Additivcharakter von R und $\Gamma(\xi)$ bzw. $\Psi(\xi)$ Multiplikativdarstellungen von R, die durch die Festsetzung $\Gamma(\xi) = 0_{l(\Gamma)}$ bzw. $\Psi(\xi) = 0_{l(\Psi)}$, falls ξ Nullteiler in R ist, für alle $\xi \in R$ erklärt sind. Wir bilden das Kroneckerprodukt der beiden Gaußschen Summen $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ und $\tau(\Psi, e; \mathfrak{M}_R)$ und formen es unter Beachtung der Rechenregeln für n-fache Darstellungssummen um:

$$\begin{aligned} \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \times \tau(\Psi, e; \mathfrak{M}_R) &= \sum_{\xi, \eta \in R} \Gamma(\xi) \times \Psi(\eta)\, e[\xi + \eta] \\ &= \sum_{\substack{\xi \in \mathfrak{M}_R \\ \zeta \in \mathfrak{M}_R}} \Gamma(\xi) \times \Psi(\zeta - \xi)\, e[\zeta] + \sum_{\substack{\xi \in \mathfrak{M}_R \\ \zeta \in \mathfrak{M}_R}} \Gamma(\xi) \times \Psi(\zeta - \xi)\, e[\zeta]. \end{aligned} \tag{5. 13}$$

Falls ξ Nichtnullteiler ist, durchläuft mit ζ auch $\xi\zeta$ alle Nullteiler von R; somit wird aus der zweiten Summe in (5. 13)

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R,\, \zeta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi) \times \Psi(\zeta - \xi)\, e[\zeta] &= \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_R} \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi) \times \Psi\big(\xi(\zeta - 1)\big)\, e[\xi\zeta] \\ &= \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_R} \tau(\Gamma \times \Psi, e_\zeta; \mathfrak{M}_R)\big(E_{l(\Gamma)} \times \Psi(\zeta - 1)\big). \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, daß die Multiplikativdarstellung $\Gamma \times \Psi(\xi)$ von R[19]) volleigentlich ist, so ist jedes $\tau(\Gamma \times \Psi, e_\zeta; \mathfrak{M}_R)$ eine volleigentliche aber nicht echte Gaußsche Summe, also nach Satz 3 bzw. Korollar 2 zu Satz 3 gleich $0_{l(\Gamma \times \Psi)}$; folglich ist auch die Gesamtsumme gleich $0_{l(\Gamma \times \Psi)}$.

Ist $\Gamma \times \Psi$ volleigentlich, so verbleibt in (5. 13) nur die erste Summe, die sich mit ähnlichen Überlegungen (wenn ζ Nichtnullteiler ist, durchläuft mit ξ auch $\xi\zeta$ alle Nichtnullteiler von R) folgendermaßen weiter aufspalten läßt:

$$\begin{aligned} \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \times \tau(\Psi, e; \mathfrak{M}_R) &= \sum_{\xi, \zeta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi) \times \Psi(\zeta - \xi)\, e[\zeta] \\ &= \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi\zeta) \times \Psi(\zeta - \xi\zeta)\, e[\zeta] \\ &= \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi) \times \Psi(1 - \xi) \sum_{\zeta \in \mathfrak{M}_R} \Gamma \times \Psi(\zeta)\, e[\zeta]. \end{aligned} \tag{5. 14}$$

Die als erster Faktor in (5. 14) auftretende 2-fache Darstellungssumme zu dem dualen Ring R

$$J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi) \times \Psi(1 - \xi) \tag{5. 15}$$

nennen wir eine *verallgemeinerte Jacobische Summe.*

---

[19]) Durch die Festsetzung $\Gamma \times \Psi(\xi) = \Gamma(\xi) \times \Psi(\xi)$ wird eine durch Γ und Ψ eindeutig bestimmte Multiplikativdarstellung von R erklärt.

Macht man die Zerlegung von (5. 14) auch mit der Aufspaltung $\zeta\xi$ an Stelle von $\xi\zeta$, so vertauschen sich die Faktoren auf der rechten Seite. Somit gelten in dualen Ringen R für jeden echten Additivcharakter $e[\xi]$ bei volleigentlichem $\Gamma \times \Psi$ für die $J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R)$ die folgenden Relationen:

$$(5.\,16)\quad \begin{aligned} \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \times \tau(\Psi, e; \mathfrak{M}_R) &= J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R)\, \tau(\Gamma \times \Psi, e; \mathfrak{M}_R), \\ \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \times \tau(\Psi, e; \mathfrak{M}_R) &= \tau(\Gamma \times \Psi, e; \mathfrak{M}_R)\, J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R). \end{aligned}$$

Sind $\Gamma(\xi)$ und $\Psi(\xi)$ zudem unitär gewählt, so sind auch $\Gamma \times \Psi$ und $\Gamma^{-1} \times \Psi^{-1}$ unitär und aus (4. 26) folgt

$$(5.\,17)\quad \begin{aligned} J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R) &= \frac{\tau(\Gamma^{-1} \times \Psi^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)}{N((0))} [\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \times \tau(\Psi, e; \mathfrak{M}_R)] \\ &= [\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \times \tau(\Psi, e; \mathfrak{M}_R)] \frac{\tau(\Gamma^{-1} \times \Psi^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)}{N((0))}. \end{aligned}$$

Da die Matrizen $\tau(\Gamma^{-1} \times \Psi^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)$ und $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) \times \tau(\Psi, e; \mathfrak{M}_R)$ miteinander vertauschbar sind, lassen sich wegen **1. 1f** bei geeigneter Numerierung der Eigenwerte von $\tau(\Gamma^{-1} \times \Psi^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)$ die Eigenwerte von $J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R)$ in der Form

$$(5.\,18)\quad J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R)_\lambda = \frac{1}{N((0))}\, \tau(\Gamma^{-1} \times \Psi^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)_\lambda\, \tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)_{\lambda_1}\, \tau(\Psi, e; \mathfrak{M}_R)_{\lambda_2}$$

$$(\lambda = 1, \ldots, l(\Gamma \times \Psi);\ \lambda_1 = 1, \ldots, l(\Gamma);\ \lambda_2 = 1, \ldots, l(\Psi);\ \lambda = (\lambda_1 - 1)\, l(\Psi) + \lambda_2)$$

darstellen.

Durch (5. 18) ist auch bestimmt, wie das Eigenpolynom von $J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R)$ aus den Eigenpolynomen der Gaußschen Summen

$$\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R),\ \tau(\Psi, e; \mathfrak{M}_R) \quad \text{und} \quad \tau(\Gamma^{-1} \times \Psi^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)$$

komponiert ist. Für die Norm der verallgemeinerten Jacobischen Summe gilt wegen (5. 17) und (1. 7)

$$(5.\,19)\quad |J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M})| = \frac{|\tau(\Gamma^{-1} \times \Psi^{-1}, {}_{-1}e; \mathfrak{M}_R)|}{N((0))^{l(\Gamma \times \Psi)}}\, |\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)|^{l(\Psi)}\, |\tau(\Psi, e; \mathfrak{M}_R)|^{l(\Gamma)}.$$

Satz 6. *Ist R ein dualer endlicher Ring, in dem* **(M)** *erfüllt ist, und sind Γ und Ψ zwei Multiplikativdarstellungen von R mit der Eigenschaft, daß $\Gamma \times \Psi$ in R volleigentlich ist, so ist die (verallgemeinerte) Jacobische Summe $J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R)$ (vgl.* (5. 15)) *für jeden festen echten Additivcharakter $e[\xi]$ von R in der Form* (5. 17) *durch echte Gaußsche Summen ausdrückbar; die Eigenwerte und die Norm von $J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R)$ sind ganzalgebraische Zahlen, für die die Kompositionsvorschriften* (5. 18) *bzw.* (5. 19) *gelten. Sind zudem auch Γ und Ψ volleigentlich, so ist die Norm von $J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R)$ von Null verschieden und alle Eigenwerte haben den Absolutbetrag $\sqrt{N((0))} = \sqrt{A(R)}$.*

5. 3. Induzierte Gaußsche Summen.

Eine für die Anwendungen besonders interessierende Klasse von Relationen mit Gaußschen Summen sind die Relationen zwischen induzierten Gaußschen Summen in verschiedenen Ringen. Wir machen hier einige Bemerkungen zu einem Induktionsschema, das sich an die Faktorgruppeninduktion in **1. 1j** anschließt.

Definition 6. *Ist R ein endlicher Ring, R_0 ein Teilring von R mit dem gleichen Einselement* 1, *existiert ein fester Homomorphismus $N_{R/R_0}(\xi)$ der Multiplikativgruppe $\mathfrak{M}_R$ auf $\mathfrak{M}_{R_0}$ und ein fester Homomorphismus $S_{R/R_0}(\xi)$ der Additivgruppe $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}_0$, ist ferner*

$e[x]$ ein Additivcharakter von R_0 und $\Gamma(x)$ eine Multiplikativdarstellung von R_0, so heiße die mit den gemäß **1. 1j** *induzierten Größen $\Gamma_{R_0/R}(\xi)$ bzw. $e_{R_0/R}(\xi)$ gebildete Gaußsche Summe*

$$\tau(\Gamma_{R_0/R}, e_{R_0/R}; \mathfrak{M}_R) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(N_{R/R_0}(\xi))\, e[S_{R/R_0}(\xi)] \tag{5. 20}$$

die durch $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_{R_0})$ in R (im Sinne der Faktorgruppeninduktion) induzierte Gaußsche Summe[20]).

Das Hauptinteresse gilt Relationen zwischen $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_{R_0})$ und $\tau(\Gamma_{R_0/R}, e_{R_0/R}; \mathfrak{M}_R)$ und es ist eine weitgehend ungelöste Frage, welche Relationen gelten und wie weit diese Relationen überhaupt in den endlichen Ringen selbst, d. h. ohne Einbettung derselben als Restklassenringe in höheren arithmetischen Körpern und Benutzung transzendenter Hilfsmittel, beweisbar sind. Besonders wichtig ist naturgemäß der Fall, daß **(M)** in R und R_0 erfüllt ist und daß sowohl $\Gamma(x)$ bzw. $e[x]$ als auch $\Gamma_{R_0/R}$ bzw. $e_{R_0/R}$ volleigentlich bzw. echt sind. Hierzu geben wir als Beispiel einen schon längere Zeit gelösten Spezialfall an:

Es seien R ein Galoisfeld, R_0 ein Teilkörper von R, N_{R/R_0} die Relativnorm, S_{R/R_0} die Relativspur und $\chi(x)$ bzw. $e[x]$ nicht Hauptcharaktere von R_0; dann gilt

$$\tau(\chi_{R_0/R}, e_{R_0/R}; \mathfrak{M}_R) = (-1)^{r-1}\tau(\chi, e; \mathfrak{M}_{R_0})^r \qquad (r = \text{Grad von } R/R_0). \tag{5. 21}$$

Für diese Beziehung existieren bekanntlich vier Beweise, nämlich 1. ein klassenkörpertheoretischer Beweis, 2. ein Beweis mit Hilfe der arithmetischen Charakterisierung (vgl. Davenport-Hasse [5c]), 3. ein elementarer Beweis von A. Weil [13a], der das Zerlegungsgesetz eines rationalen Funktionenkörpers mit endlichem Konstantenkörper bei Konstantenerweiterung benutzt, und 4. ein elementarer direkter Beweis von H. L. Schmid [10a] durch vollständige Induktion nach r.

Wir untersuchen folgenden weiteren, für manche Anwendungen wichtigen Spezialfall: Es sei R ein kommutativer dualer Ring mit Einselement, $e[x]$ ein echter Additivcharakter von R und $\chi(x)$ ein eigentlicher, also auch volleigentlicher Multiplikativcharakter von R, so daß $\tau(\chi, e; \mathfrak{M}_R)$ eine echte volleigentliche Gaußsche Summe ist. R_{rr} bezeichne den vollen r-reihigen Matrizenring über R, der ein zu R isomorphes Bild in Form seiner Skalarmatrizen enthält.

Die Matrizenspur $S_r(\xi) = \sum_{i=1}^{r} x_{ii}$, für $\xi = (x_{ij}) \in R_{rr}$ mit $x_{ij} \in R$, deren Werte $S_r(\xi)$ Elemente von R sind, ist eine Matrizeninvariante, d. h. unabhängig von der Auswahl der zugrunde gelegten Matrizendarstellung von R_{rr}, und liefert eine homomorphe Abbildung der Additivgruppe von R_{rr} auf $\mathfrak{R}$. Somit ist

$$e_r'[\xi] = e[S_r(\xi)] = e\left[\sum_{i=1}^{r} x_{ii}\right] \tag{5. 22}$$

ein durch $e[x]$ eindeutig bestimmter Additivcharakter von R_{rr}, der zudem die Eigenschaft hat, mit $e[x]$ echt zu sein[21]).

Die Matrizennorm (d. h. Determinante) $N_r(\xi) = \det|x_{ij}|$, für $\xi = (x_{ij})$ aus R_{rr}, deren Werte $N_r(\xi)$ wieder durch ξ eindeutig bestimmte Elemente von R sind, liefert einen Homomorphismus von $\mathfrak{M}_{R_{rr}}$ auf $\mathfrak{M}_R$. Wegen $N_r(\xi\eta) = N_r(\xi)\, N_r(\eta)$ ist $\xi \in \mathfrak{M}_{R_{rr}}$ dann und nur dann, wenn $N_r(\xi) \in \mathfrak{M}_R$ ist. Somit ist

$$\chi_r'(\xi) = \chi(N_r(\xi)) = \chi(\det|x_{ij}|) \tag{5. 23}$$

eine durch $\chi(\xi)$ eindeutig bestimmte Multiplikativdarstellung 1. Grades von R_{rr}. Die Regeln der Determinantenrechnung zeigen, daß der Führer $\mathfrak{f}(\chi_r')$ von $\chi_r'(\xi)$ gleich dem durch den Führer $\mathfrak{f}(\chi)$ von $\chi(x)$ in R_{rr} induzierten Ideal ist, folglich ist $\chi_r'(\xi)$ mit $\chi(x)$ ein volleigentlicher Charakter von R_{rr}.

---

[20]) Auf die mit Hilfe anderer Induktionsschemata induzierten Gaußschen Summen gehen wir hier nicht ein.

[21]) Beachte hierzu [7c], S. 373—374.

Die volleigentliche echte Gaußsche Summe

$$\tau(\chi_r', e_r'; \mathfrak{M}_{R_{rr}}) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_{R_{rr}}} \chi_r'(\xi)\, e_r'[\xi] \tag{5. 24}$$

ist die durch $\tau(\chi, e; \mathfrak{M}_R)$ in R_{rr} induzierte Gaußsche Summe.

Satz 7. *Ist $\tau(\chi, e; \mathfrak{M}_R)$ eine echte volleigentliche Gaußsche Summe in einem dualen kommutativen Ring R und R_{rr} der volle r-reihige Matrizenring über R, so ist die durch $\tau(\chi, e; \mathfrak{M}_R)$ in R_{rr} induzierte echte volleigentliche Gaußsche Summe $\tau(\chi_r', e_r'; \mathfrak{M}_{R_{rr}})$ gemäß*

$$\tau(\chi_r', e_r'; \mathfrak{M}_{R_{rr}}) = A(R)^{\sum_{\varrho=1}^{r}(\varrho-1)}\, \tau(\chi, e; \mathfrak{M}_R)^r \tag{5. 25}$$

durch $\tau(\chi, e; \mathfrak{M}_R)$ bestimmt[22]).

Beweis. Unser Beweis wird ähnlich demjenigen von H. L. Schmid [10a] für (5. 21) durch vollständige Induktion nach r geführt. Bei der Festsetzung $\chi(x) = 0$, falls $x \in R$, $x \notin \mathfrak{M}_R$, können wir die Summation in (5. 24) über alle $\xi \in R_{rr}$ laufen lassen; folglich ist bei Zugrundelegung einer festen Matrizendarstellung von R_{rr}

$$\tau(\chi_r', e_r'; \mathfrak{M}_{R_{rr}}) = \sum_{i,j=1}^{r} \sum_{x_{ij} \in R} \chi(\det|x_{ij}|)\, e\left[\sum_{i=1}^{r} x_{ii}\right]. \tag{5. 26}$$

Beweisgedankengang: Man summiere zuerst über die x_{ij} mit $i \neq j$, da diese im Argument des Additivcharakters $e[x]$ nicht auftreten. Wegen Satz 2 genügt es ferner, den Fall eines vollständig primären kommutativen Ringes R zu untersuchen.

Wir entwickeln $\det|x_{ij}|$ nach der ersten Zeile und erhalten

$$\tau(\chi_r', e_r'; \mathfrak{M}_{R_{rr}}) = \sum_{i,j=1}^{r} \sum_{x_{ij} \in R} e\left[\sum_{i=1}^{r} x_{ii}\right] \chi\left(\sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} x_{1i} D_{1i}\right), \tag{5. 27}$$

wobei D_{1i} jeweils die Unterdeterminante bezeichne, die aus $\det|x_{ij}|$ durch Streichen der ersten Zeile und i-ten Spalte entsteht. Wir führen zunächst die Summation über x_{1r} aus. Ist $D_{1r} \neq 0$, so durchläuft $x_{1r} D_{1r}$ mit $x_{1r} \in R$ jeweils ein zweiseitiges von (0) verschiedenes nilpotentes Ideal von R (eventuell den ganzen Ring R); daraus folgt, daß die Summe der zugehörigen Charakterwerte von χ, gleichgültig welche Werte die anderen Glieder im Argument von χ haben, wegen der Volleigentlichkeit von χ gleich Null ist. — Ist dagegen $D_{1r} = 0$, so hängt der Wert von $\chi(\det|x_{ij}|)$ nicht von x_{1r} ab. Somit kann nach Summation über x_{1r} der Faktor $A(R)$ herausgezogen und gleichzeitig der Summationsbereich folgendermaßen eingeschränkt werden: Es ist nicht mehr über x_{1r} und nur noch über die x_{ij} mit $D_{1r} = 0$ zu summieren.

Die gleichen Überlegungen bei der anschließenden Summation über $x_{1,r-1}, \ldots, x_{12}$, wobei jeweils eine weitere Determinantenbedingung hinzukommt (die Durchführung der Summationen ist durch die vorhergehenden Summationen nicht behindert!) ergeben

$$\tau(\chi_r', e_r'; \mathfrak{M}_{R_{rr}}) = A(R)^{r-1} \sum_{i=2}^{r} \sum_{j=1}^{r} \sum_{x_{ij} \in R} \sum_{x_{11} \in R} e\left[\sum_{i=1}^{r} x_{ii}\right] \chi(x_{11} D_{11}) \tag{5. 28}$$

$$\text{mit den Nebenbedingungen } D_{12} = \cdots = D_{1r} = 0.$$

---

[22]) Mit diesem Satz ist zugleich der wesentliche Schritt einer Relation der speziellen von Eichler eingeführten nichtkommutativen Gaußschen Summen erledigt, der von Eichler nur unter Verwendung analytischer Hilfsmittel bewiesen werden konnte. Vgl. hierzu [2a], S. 241—251 und insbesondere die Formel (57).

Da stets $\chi(x_{11}D_{11}) = \chi(x_{11})\,\chi(D_{11})$ und $e\left[\sum_{i=1}^{r} x_{ii}\right] = e[x_{11}]\,e\left[\sum_{i=2}^{r} x_{ii}\right]$ ist, folgt bei Summationsaufspaltung und Vorziehen der Summation über x_{11}

$$(5.\,29)\quad \tau(\chi_r', e_r'; \mathfrak{M}_{R_{rr}}) = A(R)^{r-1}\,\tau(\chi, e; \mathfrak{M}_R) \sum_{i=2,\,j=1}^{r} \sum_{x_{ij}\in R} \chi(D_{11})\, e\left[\sum_{i=2}^{r} x_{ii}\right]$$
$$\text{mit } D_{12} = \cdots = D_{1r} = 0.$$

In (5. 29) wird über alle x_{ij} mit $2 \leqq i \leqq r$, $1 \leqq j \leqq r$, die die Nebenbedingungen $D_{12} = 0, \ldots, D_{1r} = 0$ erfüllen, summiert. Diese Unterdeterminanten enthalten alle die erste Spalte von (x_{ij}), d. h. genauer $x_{21}, \ldots, x_{r1}$; somit sind die obigen Nebenbedingungen gleichbedeutend mit dem Bestehen eines Systems von $r-1$ homogenen linearen Gleichungen in $x_{21}, \ldots, x_{r1}$. Die Systemdeterminante A dieses homogenen Gleichungssystems ist die aus den algebraischen Komplementen von D_{11} gebildete Determinante, d. h. es ist $A \in \mathfrak{M}_R$ dann und nur dann, wenn $D_{11} \in \mathfrak{M}_R$ ist. $D_{11} \in \mathfrak{M}_R$ ist somit gleichbedeutend damit, daß $x_{21} = \cdots = x_{r1} = 0$ sein muß. Folglich liefern die von Null verschiedenen in (5. 29) noch zulässigen $x_{21}, \ldots, x_{r1}$ keinen von Null verschiedenen Beitrag zur Restsumme, d. h. es ist

$$\sum_{i,j=2}^{r} \sum_{x_{ij}\in R} \chi(D_{11})\, e\left[\sum_{i=2}^{r} x_{ii}\right] = \tau(\chi_{r-1}', e_{r-1}'; \mathfrak{M}_{R_{r-1,r-1}})$$

und somit erhalten wir

$$(5.\,30)\quad \tau(\chi_r', e_r'; \mathfrak{M}_{R_{rr}}) = A(R)^{r-1}\,\tau(\chi, e; \mathfrak{M}_R)\,\tau(\chi_{r-1}', e_{r-1}'; \mathfrak{M}_{R_{r-1,r-1}}).$$

Durch vollständige Induktion folgt hieraus (5. 25), womit Satz 7 bewiesen ist.

§ 6. Beispiele und ergänzende Bemerkungen.

6. 1. Ein Beispiel für eigentliche, aber nicht volleigentliche Multiplikativdarstellungen und Gaußsche Summen.

Die Existenz irreduzibler eigentlicher, aber nicht volleigentlicher Multiplikativdarstellungen und Gaußscher Summen weisen wir an Hand eines recht einfachen Beispieles nach. Sei dazu $R = k_{22}$ der 2-reihige volle Matrizenring über dem Galoisfeld von 2 Elementen 0, 1; R hat $2^4 = 16$ verschiedene Elemente, von denen 6 Einheiten (d. h. aus $\mathfrak{M}_R$) sind, nämlich:

$$(6.\,1)\quad \varepsilon = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \alpha = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ \beta^2 = \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \alpha\beta = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \alpha\beta^2 = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\qquad (0, 1 \in k).$$

Es gelten die Rechenregeln

$$(6.\,2)\qquad \alpha^2 = \beta^3 = \varepsilon,\ \alpha\beta\alpha = \beta^2,$$

d. h. $\mathfrak{M}_R$ ist isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$. Diese besitzt bekanntlich 3 inäquivalente irreduzible Darstellungen Γ_1, Γ_2 und Γ_3, wovon 2 vom Grad 1 sind, nämlich die identische Darstellung Γ_1 und eine (trivialerweise) volleigentliche Darstellung Γ_2 vom Grad 1. Die Darstellung Γ_3 ist vom Grad 2 und ihre Darstellungsmatrizen lassen sich wegen (6. 1) und (6. 2) folgendermaßen wählen:

$$(6.\,3)\qquad \Gamma_3(\varepsilon) = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \Gamma_3(\alpha) = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \Gamma_3(\beta) = \begin{pmatrix}\varrho&0\\0&\varrho^2\end{pmatrix}\qquad (\varrho = \text{dritte Einheitswurzel}).$$

Bedeutet $\mathfrak{r}_1$ das durch die 1. Matrizenzeile gelieferte Rechtsideal von R, so besteht $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ aus den beiden Elementen ε und α, d. h. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ ist isomorph zur zyklischen Gruppe von 2 Elementen; elementare Rechnung mit den Charakteren zeigt, daß Γ_3 auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ im Sinne von **1. 1h** die reguläre Darstellung induziert, daß also Γ_3 auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ genau einmal die identische Darstellung enthält, d. h. $l(\Gamma_3, \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}) = 1$ ist. *Somit ist Γ_3 nicht volleigentlich*, was zu zeigen war.

Da $l(\Gamma_3; \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}) = 1$ und $l(\Gamma_3) = 2$ ist, erhalten wir aus (4. 40) in diesem Spezialfall

$$A(R) - d^*(\Gamma_3, R) = 16 - 8 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 16 - 12 = 4;$$

d. h. die Eigenwerte jeder echten eigentlichen mit Γ_3 gebildeten Gaußschen Summe haben den Absolutbetrag 2, der von $\sqrt{A(R)} = 4$ abweicht. Ist $e(x)$ der Nichthauptadditivcharakter von k, so ist $e[\xi] = e(x_{11} + x_{22})$, falls $\xi = (x_{ij})$ ist, ein echter Additivcharakter von k_{22}. Numerische Ausrechnung ergibt für die echte eigentliche Gaußsche Summe $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_{k_{22}})$ bei obiger Wahl von Γ_3 (vgl. (6. 3)) den Wert

$$\tau(\Gamma_3, e; \mathfrak{M}_{k_{22}}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{6. 4}$$

Andererseits ist $e'[\xi] = e(x_{22})$, falls $\xi = (x_{ij})$ ist, ein quasiechter, aber nicht echter Additivcharakter von k_{22}, der das oben erklärte Rechtsideal $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_e$ als rechten Erklärungsmodul besitzt. Numerische Ausrechnung ergibt bei gleicher Wahl von Γ_3

$$\tau(\Gamma_3, e'; \mathfrak{M}_{k_{22}}) = \begin{pmatrix} 2\varrho & 2\varrho^2 \\ 2\varrho & 2\varrho^2 \end{pmatrix}, \tag{6. 5}$$

$$F(t; \Gamma_3, e'; \mathfrak{M}_{k_{22}}) = t^2 + 2t = t(t+2),$$

d. h. einer der Eigenwerte von $\tau(\Gamma_3, e'; \mathfrak{M}_{k_{22}})$ ist Null, während der andere den Wert -2 hat. Dieses Ergebnis ist eine Ergänzung zum Korollar 1 von Satz 3, das für diesen Spezialfall nur aussagt, daß mindestens einer der Eigenwerte von $\tau(\Gamma_3, e'; \mathfrak{M}_{k_{22}})$ gleich Null ist.

6. 2. Existenz volleigentlicher Multiplikativdarstellungen mit $l(\Gamma) > 1$.

Die Existenz (irreduzibler) volleigentlicher Multiplikativdarstellungen mit $l(\Gamma) > 1$ läßt sich recht einfach durch das folgende Beispiel nachweisen: Es sei R kommutativer vollständig primärer Hauptidealring der Charakteristik p mit Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$, d. h. R ist eine duale kommutative Algebra über einem Galoisfeld k vom Typus

$$R = k + tk + \cdots + t^{n-1}k \text{ mit } t^n = 0. \tag{6. 6}$$

Wegen $\mathfrak{n} \neq (0)$ existiert dann mindestens ein volleigentlicher Multiplikativcharakter $\chi(x)$ von R, der zudem die Eigenschaft hat, für alle Elemente von $k^\times$ gleich 1 zu sein, d. h. dessen Wert unabhängig von der Restklasse $x \bmod \mathfrak{n}$ ist[23]). Ist R_{rr} der volle r-reihige Matrizenring über R ($r \geqq 2$), so ist die gemäß (5. 23) durch χ in R_{rr} induzierte Multiplikativdarstellung $\chi'_r(\xi) = \chi(N_r(\xi))$ volleigentlich, vom Grad 1 und hat die Eigenschaft $\chi'_r(\xi) = 1$ für alle $\xi \in k_{rr}$, d. h. der Wert ist ebenfalls unabhängig von der Radikalrestklasse.

Ist weiter $\Gamma(\xi)$ eine irreduzible Multiplikativdarstellung von $\mathfrak{M}_{k_{rr}}$ vom Grad $l(\Gamma) \geqq 2$ (eine solche existiert stets), so liefert $\Gamma(\xi)$ bei der Festsetzung $\Gamma(\xi) = E_{l(\Gamma)}$ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}'}$ ($\mathfrak{n}'$ Radikal von R_{rr}) auch eine Multiplikativdarstellung von R_{rr}. Wir bilden die Multiplikativdarstellung

$$\Gamma \times \chi'_r(\xi) = \Gamma(\xi) \times \chi'_r(\xi); \tag{6. 7}$$

diese ist ebenfalls vom Grad $l(\Gamma)$ und irreduzibel, da sie auf der Untergruppe $\mathfrak{M}_{k_{rr}}$ mit der auf $\mathfrak{M}_{k_{rr}}$ irreduziblen Darstellung $\Gamma(\xi)$ übereinstimmt. Da $\Gamma(\xi) = E_{l(\Gamma)}$ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}'}$, ist $\Gamma \times \chi'_r(\xi) = E_{l(\Gamma)} \cdot \chi'_r(\xi)$ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}'}$, und folglich ist $\Gamma \times \chi'_r$ volleigentlich. Zusammen ergibt dies den angekündigten Existenznachweis[24]).

Im Hinblick auf die Bedeutung, die im Kommutativen gerade die echten eigentlichen Gaußschen Summen in einfachen Ringen, d. h. in Galoisfeldern haben, interessiert auch in nichtkommutativen einfachen Ringen wegen Satz 4 und (4. 28) besonders die Existenz irreduzibler volleigentlicher Multiplikativdarstellungen höheren Grades. Wie im Kommu-

[23]) Man wähle hierzu einen volleigentlichen Charakter von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}}$; da $\mathfrak{M}_R$ direktes Produkt von $k^\times$ und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}}$ ist, hat dieser die verlangte Eigenschaft.

[24]) Nach diesem Muster können auch in allgemeineren Komponentenringen R mit Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$ irreduzible volleigentliche Multiplikativdarstellungen $\Gamma(\xi)$ mit $l(\Gamma) > 1$ konstruiert werden.

tativen sind auch hier gerade in einfachen Ringen die größten Schwierigkeiten zu erwarten (vgl. 4. 5). Wir weisen die Existenz solcher Darstellungen wieder durch ein Beispiel nach, formulieren jedoch einen dabei verwendeten Gedankengang allgemeiner, da er auch zur Behandlung allgemeinerer Fälle von Nutzen sein dürfte.

Es sei k ein Primkörper der Charakteristik p ($p \geqq 3$), d. h. ein Galoisfeld von p-Elementen, und $R = k_{22}$ der 2-reihige volle Matrizenring über k, der p^4 verschiedene Elemente besitzt. Dann ist (vgl. etwa [12], S. 6) $\mathfrak{M}_R$ eine Gruppe von $(p^2-1)(p-1)p$ Elementen, die einen Normalteiler von $(p^2-1)p$ Elementen besitzt, nämlich die Normeinsgruppe $\mathfrak{N}_1$, die aus allen Elementen der Determinante 1 besteht. Die Faktorgruppe $\mathfrak{M}_R/\mathfrak{N}_1$ ist isomorph zur Multiplikativgruppe $k^\times$.

Ist $\mathfrak{r}_1$ wieder das Rechtsideal von R, das durch die erste Zeile der zugrunde gelegten Matrizendarstellung geliefert wird, so besteht $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ aus $(p-1)p$ Elementen und besitzt folgende Erzeugung:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \alpha^{p-1} = \varepsilon \ (a = \text{Erzeugende von } k^\times,\ \varepsilon = \text{Einselement von } \mathfrak{M}_R). \tag{6.8}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \beta^p = \varepsilon;\ \alpha\beta\alpha^{p-2} = \beta^a.$$

Somit besteht $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ aus p Klassen konjugierter Elemente, nämlich $\{\varepsilon\}$, $\{\beta, \beta^2, \ldots, \beta^{p-1}\}$, $\{\alpha, \alpha\beta, \ldots, \alpha\beta^{p-1}\}, \ldots,$ $\{\alpha^{p-2}, \alpha^{p-2}\beta, \ldots, \alpha^{p-2}\beta^{p-1}\}$, und hat p verschiedene irreduzible Darstellungen. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ hat als zyklischen Normalteiler der Ordnung p die von β erzeugte Untergruppe $\mathfrak{Z}_1$. Da $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}/\mathfrak{Z}_1$ isomorph zu $k^\times$ ist, hat $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ $p-1$ irreduzible Darstellungen vom Grad 1, nämlich die durch die Multiplikativcharaktere von $k^\times$ gemäß **1. 1j** induzierten Darstellungen; hinzu kommt eine irreduzible Darstellung Γ^* vom Grad $p-1$, nämlich die durch einen Multiplikativcharakter

$$\chi^\lambda(\beta^\nu) = \varrho_p^{\lambda\nu} \qquad (\lambda \not\equiv 0 \bmod p,\ \varrho_p = p\text{-te Einheitswurzel}) \tag{6.9}$$

von $\mathfrak{Z}_1$ in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ gemäß **1. 1i** induzierte Darstellung, die auf $\mathfrak{Z}_1$ in die direkte Summe der $p-1$ Darstellungen $\chi^\lambda(\lambda \not\equiv 0 \bmod p)$ von $\mathfrak{Z}_1$ zerfällt.

Da alle Elemente von $\mathfrak{Z}_1$ die Norm 1 haben, ist $\mathfrak{Z}_1$ zugleich eine zyklische Untergruppe von $\mathfrak{N}_1$. Es sei nun $\Delta(\xi)$ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{N}_1$, die auf der Untergruppe $\mathfrak{Z}_1$ nur in Darstellungen $\chi^\lambda(\beta^\nu)$ von $\mathfrak{Z}_1$ mit $\lambda \not\equiv 0 \bmod p$ zerfällt. Wählen wir als Vertretersystem der Rechtsklassen von $\mathfrak{M}_R$ nach $\mathfrak{N}_1$ die Elemente $\varepsilon, \alpha, \ldots, \alpha^{p-2}$, so sind alle irreduziblen Bestandteile der gemäß **1. 11** und (1. 10) in $\mathfrak{M}_R$ durch Δ induzierten Darstellung Γ_Δ volleigentlich und vom Grad $l(\Gamma) > 1$, denn Γ_Δ ist auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ gleich der direkten Summe von mehreren Vertretern der oben beschriebenen Darstellung Γ^*. Somit genügt es zum Existenzbeweis volleigentlicher Darstellungen, die Existenz von Darstellungen Δ mit der verlangten Eigenschaft nachzuweisen[25]).

Sei jetzt speziell $p = 3$. Dann gibt es eine irreduzible Darstellung Δ von $\mathfrak{N}_1$ mit $l(\Delta) = 1$, die auf $\mathfrak{Z}_1$ mit $\chi^1(\beta^\nu) = \varrho_3^\nu$ übereinstimmt (man schreibe dazu die Elemente von $\mathfrak{N}_1$ in Klassen konjugierter Elemente; die etwas langwierige Rechnung sparen wir uns hier). Die durch Δ auf $\mathfrak{M}_R$ nach der obigen Vorschrift induzierte Darstellung Γ_Δ ist vom Grad 2 und irreduzibel, da sie schon auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}_1}$ irreduzibel ist (sie stimmt hier mit Γ^* überein). Ferner ist Γ_Δ volleigentlich, da es für β bzw. β^2 die Werte

$$\Gamma_\Delta(\beta) = \begin{pmatrix} \varrho_3 & 0 \\ 0 & \varrho_3^2 \end{pmatrix},\ \Gamma_\Delta(\beta^2) = \begin{pmatrix} \varrho_3^2 & 0 \\ 0 & \varrho_3 \end{pmatrix}$$

hat. Somit ist durch dieses Beispiel der gewünschte Existenznachweis erbracht.

Wir geben anschließend noch den numerischen Wert der mit Γ_Δ und dem echten Additivcharakter $e[\xi] = e(x_{11} + x_{22})$ für $\xi = (x_{ij})$ ($e(x)$ mit $e(1) = \varrho_3$ echter Additivcharakter von k) gebildeten Gaußschen Summe $\tau(\Gamma_\Delta, e; \mathfrak{M}_R)$ an:

$$\tau(\Gamma_\Delta, e; \mathfrak{M}_R) = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},\ F(t; \Gamma_\Delta, e; \mathfrak{M}_R) = (t-9)^2. \tag{6.10}$$

Bei einem anderen echten Additivcharakter $e'[\xi]$ unterscheidet sich die Gaußsche Summe $\tau(\Gamma_\Delta, e'; \mathfrak{M}_R)$ von $\tau(\Gamma_\Delta, e; \mathfrak{M}_R)$ durch einen Matrizenfaktor $\Gamma_\Delta(\xi)$. Die Tatsache, daß die Eigenwerte dieser speziellen Gaußschen Summen algebraische Zahlen vom einfachsten Typus sind, darf nicht verwundern, da auch im Galoisfeld von 3 Elementen die Werte der Gaußschen Summen von recht einfacher Natur sind.

---

[25]) Man sieht übrigens leicht, daß alle von der identischen Darstellung verschiedenen irreduziblen Darstellungen Δ von $\mathfrak{N}_1$ vom Grad $l(\Gamma) \geqq \frac{p-1}{2}$ sein müssen, denn alle β^ν mit $\nu \equiv \nu_0 x^2 \bmod p$ sind in $\mathfrak{N}_1$ zueinander konjugiert, und folglich muß jede nichtidentische irreduzible Darstellung Δ von $\mathfrak{N}_1$ auf $\mathfrak{Z}_1$ in mindestens $\frac{p-1}{2}$ verschiedene Bestandteile zerfallen.

6. 3. Ergänzende Bemerkungen.

6. 3a. In **4. 2** leiteten wir für die irreduziblen nicht eigentlichen Gaußschen Summen in einfachen Ringen den Wert (4. 15) her; wir wollen hier diesen Ausdruck $\tau(1, e; \mathfrak{M}_R) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} e[\xi]$ noch etwas weiter diskutieren. Falls $e[\xi]$ nicht quasiecht ist, d. h. falls $e[\xi]$ der Hauptcharakter ist, wird trivialerweise (vgl. [11], S. 6)

$$\tau(1, e; \mathfrak{M}_R) = A(\mathfrak{M}_R) = (q^r - 1)(q^r - q) \cdots (q^r - q^{r-1}),$$

wenn $R = k_{rr}$ und k das Galoisfeld von q Elementen ist.

Falls $e[\xi]$ quasiecht ist, ist wegen (3. 20) und einfacher Charakterrelationen die folgende Umformung möglich:

$$\begin{aligned} (6.\ 11) \qquad \tau(1, e; \mathfrak{M}_R) &= -\sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} e[\xi] \\ &= -\sum_{\nu=0}^{r-1} a_{r-1,\nu}(R) \sum_{\substack{\mathfrak{r}_\nu \text{ mit} \\ \varrho(\mathfrak{r}_\nu)=\nu}} \sum_{\xi \in \mathfrak{r}_\nu} e[\xi] \\ &= -\sum_{\nu=0}^{r-1} a_{r-1,\nu}(R) \sum_{\substack{\mathfrak{r}_\nu \leq \mathfrak{r}_e \\ \tau(\varrho_\nu)=\nu}} \sum_{\xi \in \mathfrak{r}_\nu} e[\xi]. \end{aligned}$$

Ist speziell $e[\xi]$ echt, d. h. $\mathfrak{r}_e = (0)$, so wird

$$(6.\ 12) \qquad \tau(1, e; \mathfrak{M}_R) = -a_{r-1,0}(R),$$

da alle anderen Charaktersummen den Wert Null haben.

6. 3b. Eine explizite numerische Berechnung der nichtkommutativen Gaußschen Summen und ihrer Eigenwerte, wie sie im kommutativen Spezialfall in Komponentenringen mit Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$ in [7a] durchgeführt wurde, soll in dieser Arbeit nicht behandelt werden, da einerseits hierzu weitere langwierige idealtheoretische Hilfsbetrachtungen benötigt würden und andererseits noch nicht geklärt ist, wie weit die Gaußschen Summen in allgemeinen dualen Ringen (so z. B. die in nicht fastprimären Ringen) für die Anwendungen überhaupt von Bedeutung sind. Jedoch ist es mit den hier hergeleiteten Ergebnissen (insbesondere Satz 7) möglich, die bisher allein aus den Anwendungen bekannten speziellen nichtkommutativen Gaußschen Summen von Eichler [2a] in normalen einfachen Algebren über endlich-algebraischen Zahlkörpern zu berechnen, da diese induzierte Gaußsche Summen (vom Grad 1) sind und sich somit auf den kommutativen Spezialfall zurückführen lassen.

Ferner kann die in [7a], § 2 im Kommutativen hergeleitete Reduktionsmethode fast wörtlich auf den Fall irreduzibler echter volleigentlicher Gaußscher Summen in primären Hauptidealringen R mit Radikal $\mathfrak{n} \neq (0)$ übertragen werden, insbesondere dann, wenn die Kompositionsreihe der zweiseitigen Ideale von R eine geradzahlige Länge hat; in diesem Fall ist der Wert der Gaußschen Summe gleich dem Produkt einer geeigneten Darstellungsmatrix $\Gamma(\xi)$ mit einem Charakterwert $e[\xi]$ und mit einer Elementanzahl $A_R(\mathfrak{a})$ (wir wollen jedoch hier nicht auf Einzelheiten eingehen).

6. 3c. Einfache Überlegung zeigt, daß die in § 5 zunächst für beliebige volleigentliche Multiplikativdarstellungen hergeleiteten Aussagen des H. L. Schmidschen Darstellungssummensatzes (Satz 5, insbesondere (5. 7)) und des Satzes 6 über verallgemeinerte Jacobische Summen (vgl. (5. 17)) sich gemäß Reduktionsregel 1 aus § 1 auf solche für die irreduziblen Bestandteile der Multiplikativdarstellungen zurückführen lassen, wobei beide Seiten der angegebenen Matrizengleichungen sich in direkte Matrizensummen aufspalten.

Aber auch die in Reduktionsregel 2 ausgesprochene Zerlegung in Komponenten kann auf diese beiden Relationen zwischen Darstellungssummen wegen (1. 7) angewendet werden, d. h. die rechten und linken Seiten

dieser Relationen sind jeweils die Kroneckerprodukte der induzierten Bildungen in den Komponentenringen (dabei ist in (5. 7) der Anzahlfaktor jeweils in die Matrix hinein zu multiplizieren); insbesondere ist

$$J(\Gamma, \Psi; \mathfrak{M}_R) = J(\Gamma^{(1)}, \Psi^{(1)}; \mathfrak{M}_{R_1}) \times \cdots \times J(\Gamma^{(n)}, \Psi^{(n)}; \mathfrak{M}_{R_n}). \tag{6. 13}$$

Dies war auch der Grund, weshalb diese Reduktionen in § 1 zunächst für allgemeine n-fache Darstellungssummen behandelt wurden[26]).

6. 3d. *Anwendungsmöglichkeiten dieser Theorie.* Abgesehen davon, daß diese Theorie den kommutativen Spezialfall umfaßt, sind — wie wir schon erwähnten — die Eichlerschen Gaußschen Summen vom Grad 1 in normalen einfachen Algebren über Zahlkörpern ein erster aus den Anwendungen bekannter Spezialfall unserer Gaußschen Summen. Eine Übertragung der Eichlerschen Theorie auf normale einfache Algebren über algebraischen Funktionenkörpern einer Veränderlichen über einem Galoisfeld (und damit das Erfassen einer weiteren Klasse der hier eingeführten Gaußschen Summen) bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, zumal in Satz 5 der Haupthilfssatz zur Herleitung der Funktionalgleichung von L-Funktionen in solchen schon geliefert ist. Die Möglichkeit der Fortsetzung der Eichlerschen Theorie einerseits auf nicht einfache Algebren, andererseits auf L-Funktionen mit allgemeinen volleigentlichen Darstellungen dürfte am einfachsten in Algebren über solchen Funktionenkörpern zu untersuchen sein.

Auf die Analogie unserer Eigenpolynome zu den L-Funktionen in algebraischen Funktionenkörpern wurde schon hingewiesen (gleicher Absolutbetrag der Eigenwerte, Funktionalgleichung). Darüber hinaus stimmt die Komposition der Eigenpolynome bei direkter Summenbildung von Ringen (Satz 2) mit der der L-Funktionen eines Doppelkörpers über einem Galoisfeld bei Komposition aus denen der Funktionenkörper einer Veränderlichen überein (vgl. [7e]). An diesem formalen Übereinstimmen ist bemerkenswert, daß einmal eine direkte Summenbildung, das andere Mal eine Kompositumsbildung der Anlaß ist. Ferner hat diese Polynomkomposition große Ähnlichkeit mit einer, die Eichler [2b] für Polynome von zwei Veränderlichen vorschrieb, damit sie einen Ring vom Typus des Korrespondenzenringes eines algebraischen Funktionenkörpers bilden.

Die idealtheoretischen Überlegungen dieser Arbeit (vgl. § 3) stehen in engem Zusammenhang mit bis jetzt im Nichtkommutativen wenig untersuchten ringtheoretischen Strukturaussagen. — Die Frage der Existenz eigentlicher bzw. volleigentlicher Multiplikativdarstellungen ist eine gewisse Weiterführung der Frage, wann eine Gruppe treue irreduzible Darstellungen besitzt (vgl. [3]).

Die hier skizzierten Anwendungsmöglichkeiten geben nur einen groben gebietsmäßigen Umriß; auf die Vielzahl der Einzelprobleme und der sich anschließenden Fragestellungen soll nicht eingegangen werden.

Literatur.

[1] *M. Deuring*, Algebren. Berlin 1935.

[2a] *M. Eichler*, Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen. J. reine angew. Math. **179**, 227—251 (1937).

[2b] *M. Eichler*, Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper und ihre Anwendung auf den Beweis der Riemannschen Vermutung für die Kongruenzzetafunktion. Math. Coll. Münster 1954.

[3] *W. Gaschütz*, Endliche Gruppen mit treuen absolut-irreduziblen Darstellungen. Math. Nachr. Berlin **12**, 253—255 (1954).

[4] *W. Gröbner*, Über irreduzible Ideale in kommutativen Ringen. Math. Ann. **110**, 197—222 (1934).

[5a] *H. Hasse*, Zahlbericht, Teil II. Jber. DMV. Ergänzungsband **6** (1930).

[5b] *H. Hasse*, Gaußsche Summen zu Normalkörpern über endlich-algebraischen Zahlkörpern. Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1952, Nr. 1.

[5c] *H. Davenport-H. Hasse*, Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen. J. reine angew. Math. **172**, 151—182 (1934).

[6a] *N. Jacobson*, The theory of rings. New York 1943.

[6b] *N. Jacobson*, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945).

[7a] *E. Lamprecht*, Allgemeine Theorie der Gaußschen Summen in endlichen kommutativen Ringen. Math. Nachr. Berlin **9**, 148—196 (1953).

[7b] *E. Lamprecht*, Gaußsche Summen in endlichen Ringen und ihre Anwendungen. Ber. Math.-Tagung Berlin 1953, 179—185.

[7c] *E. Lamprecht*, Über I-reguläre Ringe, reguläre Ideale und Erklärungsmoduln. I. Math. Nachr. Berlin **10**, 353—382 (1953).

[26]) Weiter läßt sich die Definition der Kloostermanschen Summen und anderer Darstellungssummen auf beliebige endliche Ringe übertragen; diese können dann mittels dieser allgemeinen Reduktionsregeln auf einfachere Bestandteile zurückgeführt werden.

[7d] *E. Lamprecht*, Allgemeine Gaußsche Summen in endlichen Ringen. Proc. Int. Math. Congress 1954, 38.
[7e] *E. Lamprecht*, Zetafunktionen symmetrisch-erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher. Math. Z. **64**, 47–71 (1956).
[8] *C. C. MacDuffee*, The theory of matrices. Ergebn. Math. Grenzgeb. **2** (1933).
[9] *H. Salié*, Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$. Math. Z. **34**, 91—109 (1932).
[10a] *H. L. Schmid*, Relationen zwischen verallgemeinerten Gaußschen Summen. J. reine angew. Math. **176**, 189—191 (1937).
[10b] *H. L. Schmid-O. Teichmüller*, Ein neuer Beweis für die Funktionalgleichung der L-Reihen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **15**, 85—96 (1947).
[11] *A. Speiser*, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Berlin 1937.
[12] *B. L. van der Waerden*, Gruppen von linearen Transformationen. Ergebn. Math. Grenzgeb. **4** (1935).
[13a] *A. Weil*, Numbers of solutions of equations in finite fields. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 497—508 (1949).
[13b] *A. Weil*, Jacobi sums as „Größencharaktere". Trans. Amer. math. Soc. **73**, 487—495 (1952).

Eingegangen 28. Mai 1955.

Über das Hassesche Klassenkörper-Zerlegungsgesetz und seine Verallgemeinerung für beliebige abelsche Funktionenkörper.

Von *Peter Roquette*, z. Zt. in Princeton.

Inhalt.

§ 1. Einleitung 49
§ 2. Der Hassesche Homomorphismus 51
§ 3. Das Klassenkörper-Zerlegungsgesetz 55
§ 4. Der Endlichkeitssatz 62
§ 5. Verallgemeinerung für beliebige abelsche Funktionenkörper 66
Literaturverzeichnis 67

§ 1. Einleitung.

1. Nach Hasse [2] gilt für einen elliptischen Funktionenkörper K über seinem m-Teilungskörper $\mathsf{K}m$ ein ähnliches Primdivisor-Zerlegungsgesetz, wie es für abelsche Zahlkörpererweiterungen durch die Klassenkörpertheorie bekannt ist. Hasse stellte damals die Forderung auf, sein Zerlegungsgesetz in eine allgemeine, klassenkörper-ähnliche Theorie der Funktionenkörper einzubauen. Nun ist kürzlich von Kawada und Tate [5] eine derartige allgemeine Theorie, genannt Pseudo-Klassenkörpertheorie, dargestellt worden. Diese Autoren beweisen für unverzweigte Funktionenkörpererweiterungen ein Reziprozitätsgesetz, welches dem Artinschen aus der Zahlentheorie weitgehend analog ist. Da nun das Artinsche Reziprozitätsgesetz im Zahlkörperfalle eine Aussage über die Zerlegung der Primdivisoren enthält, so ist zu erwarten, daß auch für Funktionenkörper das Kawada-Tatesche Reziprozitätsgesetz mit dem Hasseschen Zerlegungsgesetz in engem Zusammenhang steht. Die Untersuchung dieses Zusammenhanges war der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit.

Allerdings ist es nicht möglich, das Hassesche Zerlegungsgesetz direkt als Folgerung aus den Kawada-Tateschen Resultaten herzuleiten. Denn bei den letzteren wird der Konstantenkörper k von K als algebraisch-abgeschlossen vorausgesetzt, während gerade bei dieser Voraussetzung das Hassesche Zerlegungsgesetz trivial wird. Demnach ist der vermutete Zusammenhang in einem gemeinsamen, beiden Resultaten zugrunde liegenden Formalismus zu suchen. Ein solcher wird durch die allgemeine Kohomologietheorie folgendermaßen geliefert[1]):

[1]) Für eine Darstellung der allgemeinen Kohomologietheorie möge auf das Buch von *Cartan-Eilenberg*, Homological Algebra, verwiesen werden, welches demnächst in der Princeton University Press erscheinen soll. Es sei jedoch bemerkt, daß die Kenntnis der allgemeinen Kohomologietheorie in dieser Arbeit nicht vorausgesetzt wird; ich erwähne sie nur, um den Anschluß an *Kawada-Tate* [5] herzustellen.

2. Vorgegeben sei ein algebraischer Funktionenkörper K in einer Variablen, und eine endliche Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von K; es sei L der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}$. Man betrachte die Kohomologiegruppen zu $\mathfrak{G}$ einerseits in der Divisorklassengruppe $\mathfrak{C}$ von K und andererseits in der multiplikativen Gruppe $\mathsf{k}^\times$ des Konstantenkörpers k von K; sie mögen mit $H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$ bzw. $H^r(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$ bezeichnet werden, wobei der ganzzahlige Parameter r die Dimension angibt.

Die arithmetische Struktur von K gibt zu einem Homomorphismus h von $H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$ in $H^{r+2}(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$ Anlaß, welchen man auf die folgende Weise erhält: Es sei $\mathfrak{D}$ die Divisorgruppe von K, und $\mathfrak{H}$ die Gruppe der Hauptdivisoren. Es ist $\mathfrak{D}/\mathfrak{H} = \mathfrak{C}$, und $\mathsf{K}^\times/\mathsf{k}^\times$ isomorph zu $\mathfrak{H}$. Daher sind die beiden Homomorphismenfolgen

$$1 \longrightarrow \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow 1$$
$$1 \longrightarrow \mathsf{k}^\times \longrightarrow \mathsf{K}^\times \longrightarrow \mathfrak{H} \longrightarrow 1$$

exakt.

Zu jeder dieser „exact sequences" gehört nach der allgemeinen Kohomologietheorie ein δ-Operator, welcher die Kohomologiegruppen der vierten Gruppe in die der zweiten Gruppe der Folge abbildet, unter Erhöhung der Dimensionszahl um 1, also

$$\delta_1: \qquad H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}) \longrightarrow H^{r+1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}),$$
$$\delta_2: \qquad H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \longrightarrow H^{r+1}(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times).$$

Die Hintereinanderausführung $\delta_1 \delta_2$ ergibt dann den oben erwähnten Homomorphismus

$$h: \qquad H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}) \longrightarrow H^{r+2}(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times).$$

Das Studium von h in der Dimension $r = -1$ lieferte nun bei Kawada-Tate unter der Voraussetzung der algebraischen Abgeschlossenheit von k gerade deren Reziprozitätsgesetz, falls K/L unverzweigt ist[2]).

In dieser Arbeit werde ich zeigen, daß h in der Dimension $r = 0$ bei beliebigem k gerade das Hassesche Zerlegungsgesetz liefert, falls der Körper K elliptisch und $\mathsf{L} = \mathsf{K}m$ sein m-Teilungskörper ist.

Zu diesem Zweck werde ich einen neuen Beweis des Hasseschen Resultates liefern, welcher diese Tatsache in Evidenz setzt. Hilfsmittel zu dem Beweis ist die Theorie der Faktorsysteme sowie die damit zusammenhängende Theorie der abelschen Algebren[2a]).

3. Die Bedeutung des hier gegebenen Beweises für das Hassesche Zerlegungsgesetz liegt jedoch nicht nur in der eben herausgestellten Verwandtschaft mit der Kawada-Tateschen Klassenkörpertheorie. Sie liegt vielmehr auch in den folgenden Tatsachen:

Erstens läßt sich der Beweis wörtlich genau so nicht nur für den m-Teilungskörper $\mathsf{K}m$, sondern auch für einen beliebigen elliptischen Teilkörper L von K führen.

Die Durchführung eines solchen Beweises wurde schon von Hasse in [2] als Aufgabe gestellt. Die Befreiung von den speziellen Gegebenheiten der m-Teilung bewirkt eine größere Durchsichtigkeit und ermöglicht einen tieferen Einblick in die herrschenden Gesetzmäßigkeiten. Allerdings nimmt dann das Zerlegungsgesetz eine etwas andere Form an als bei Hasse (vgl. § 3, **16**, Satz 5).

Zweitens lassen sich dieselben Beweismethoden nicht nur für das Hassesche Zerlegungsgesetz anwenden, sondern auch für den Beweis des tiefer liegenden schwachen Weilschen Endlichkeitssatzes.

---

[2]) Siehe [5], S. 204, Formel (20).

[2a]) Für diese sei auf Hasse [4], § 1—2 verwiesen.

Ich werde das in § 4 ausführen. Der Beweis des schwachen Weilschen Endlichkeitssatzes war ja auch bei Hasse [2] der Hauptgrund für die Aufstellung seines Zerlegungsgesetzes. Interessant ist, daß der schwache Weilsche Endlichkeitssatz hier *direkt* unter alleiniger Betrachtung des obigen Homomorphismus h bewiesen werden kann, ohne daß auf den in § 3 angeführten Zusammenhang mit dem Zerlegungsgesetz Bezug genommen werden muß. Das hat insbesondere zur Folge, daß die Weilsche Distributionenlehre *vollständig vermieden* werden kann, — eine Tatsache, die insbesondere bei der Verallgemeinerung auf beliebige abelsche Funktionenkörper (siehe unten) wichtig ist[3]).

Drittens kann derselbe Beweis auch für einen beliebigen abelschen Funktionenkörper an Stelle eines elliptischen geführt werden.

Dazu ist folgendes zu sagen:

4. Die Möglichkeit einer solch weitgehenden Verallgemeinerung ist eine Folge der bahnbrechenden Resultate von A. Weil und seiner Schule, welche die arithmetische Struktur der abelschen Funktionenkörper weitgehend geklärt haben. Man weiß heute, daß die Arithmetik der abelschen Funktionenkörper in vieler Hinsicht ähnlich ist zu der der elliptischen. In § 5 werde ich nachweisen, daß sie jedenfalls alle Eigenschaften besitzt, die bei den elliptischen Funktionenkörpern zum Beweis des Hasseschen Zerlegungsgesetzes und des schwachen Weilschen Endlichkeitssatzes herangezogen wurden. Diese Eigenschaften sind im elliptischen Falle meist trivial, dagegen im allgemeinen abelschen Falle verhältnismäßig schwierig zu beweisen. Das ist der Grund, weshalb ich hier nicht gleich von vornherein die allgemeinen abelschen Funktionenkörper behandle, sondern den elliptischen Fall, sozusagen als ein einfaches Modell, voranstelle.

Außerdem möge die in § 5 angegebene Liste von Eigenschaften als ein Maßstab für eine noch zu entwickelnde, auf bewertungstheoretischer Grundlage fundierte Theorie der abelschen Funktionenkörper dienen (bekanntlich fehlt bis heute eine solche Theorie). Diese Theorie hätte also insbesondere die Eigenschaften in § 5 einfach zu beweisen. Ich hoffe, in näherer Zukunft darauf zurückzukommen.

6. Es sei noch folgendes erwähnt: *In dieser Arbeit setze ich voraus, daß der Grad* $[\mathsf{K}:\mathsf{L}]$ *der zu untersuchenden Körpererweiterung* K/L *prim ist zur Charakteristik von* K. Diese Voraussetzung garantiert die Gültigkeit der Kummerschen Theorie. Sie genügt jedoch nicht immer bei den zahlentheoretischen Anwendungen, wo manchmal gerade der konträre Fall interessiert, in welchem $[\mathsf{K}:\mathsf{L}]$ eine Potenz der Charakteristik von K ist. In diesem letzteren Falle ist statt der multiplikativen Kummerschen Theorie die additive Theorie der abelschen p-Erweiterungen nach Artin und Witt heranzuziehen. Tut man das, so erhält man entsprechende Resultate zu denen in dieser Arbeit. Ich werde das in einer anschließenden Arbeit genauer ausführen.

§ 2. Der Hassesche Homomorphismus.

7. Gemäß den Ausführungen in der Einleitung sei vorgegeben:

K ein separabel-erzeugbarer Funktionenkörper in einer Variablen. Ich setze voraus, daß K elliptisch ist, wobei ich darunter nicht nur (wie meist üblich) verstehe, daß K das Geschlecht $\mathbf{1}$ besitzt, sondern auch, daß erstens das Geschlecht einer jeden Konstantenerweiterung von K ebenfalls gleich $\mathbf{1}$ ist[3a]), und daß zweitens K mindestens einen rationalen Punkt enthält.

[3]) Übrigens läßt sich auch daran anschließend der „starke" Weilsche Endlichkeitssatz ([2], S. 61) ohne Verwendung der Distributionenlehre beweisen.

[3a]) Dazu ist hinreichend, daß der Konstantenkörper k vollkommen ist oder daß die Charakteristik von K von 2 und 3 verschieden ist.

k sei der Konstantenkörper von K.

$\mathfrak{D}, \mathfrak{C}$ seien die Divisorgruppe und die Divisorklassengruppe von K. Falls gelegentlich der zugehörige Körper erwähnt werden soll, so schreibe ich dafür auch $\mathfrak{D}(\mathsf{K})$ bzw. $\mathfrak{C}(\mathsf{K})$.

$\mathfrak{D}_0, \mathfrak{C}_0$ seien diejenigen Untergruppen von $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{C}$, deren Elemente den Grad 0 besitzen. Wie üblich, nenne ich die Divisorklassen vom Grade 0 kurz auch die *Nullklassen*. Auch hier schreibe ich gelegentlich genauer $\mathfrak{D}_0(\mathsf{K})$ bzw. $\mathfrak{C}_0(\mathsf{K})$.

Vorgegeben sei ferner:

$\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe von Automorphismen von K, welche k elementweise festlassen.

n, n_0 seien die Ordnung und der Exponent von $\mathfrak{G}$. Ich setze voraus, daß n_0 (und damit auch n) prim ist zur Charakteristik von K, und daß die n_0-ten Einheitswurzeln in k enthalten sind.

L sei der Invariantenkörper von $\mathfrak{G}$. Es ist also K/L eine normale und separable Erweiterung. Ich setze voraus, daß K/L unverzweigt ist. Diese Voraussetzung ist bekanntlich damit gleichbedeutend, daß auch L elliptisch ist. Sie hat ferner zur Folge, daß $\mathfrak{G}$ aus lauter Translationsautomorphismen besteht[4]).

ε sei der identische Einbettungsisomorphismus von L in K. Er definiert in natürlicher Weise einen (ebenfalls mit ε bezeichneten) Isomorphismus von $\mathfrak{D}(\mathsf{L})$ in $\mathfrak{D}(\mathsf{K})$ sowie einen Homomorphismus von $\mathfrak{C}(\mathsf{L})$ in $\mathfrak{C}(\mathsf{K})$. Dabei wird $\mathfrak{D}_0(\mathsf{L})$ in $\mathfrak{D}_0(\mathsf{K})$ sowie $\mathfrak{C}_0(\mathsf{L})$ in $\mathfrak{C}_0(\mathsf{K})$ abgebildet. Als Homomorphismus von $\mathfrak{C}_0(\mathsf{L})$ in $\mathfrak{C}_0(\mathsf{K})$ heißt ε auch ein *Multiplikator* von L in K.

8. Gemäß dem in der Einleitung Gesagten ist der dort in Abschnitt 2 definierte Homomorphismus h, der $H^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$ in $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$ überführt, also $h\colon H^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}) \to H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$, zu untersuchen. Wie schon in Fußnote [1]) gesagt, möchte ich jedoch die allgemeine Kohomologietheorie hier nicht als bekannt voraussetzen; daher gebe ich zunächst eine direkte, rechnerische Definition von h folgendermaßen.

Es sei $\mathfrak{C}^{\mathfrak{G}}$ die Invariantengruppe von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{C}$. Da $H^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$ isomorph zu einer gewissen Faktorgruppe von $\mathfrak{C}^{\mathfrak{G}}$ ist, so genügt es, h als Homomorphismus von $\mathfrak{C}^{\mathfrak{G}}$ in $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$ anzugeben; dabei fasse ich $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$ als Gruppe der Faktorsystemklassen zu $\mathfrak{G}$ in $\mathsf{k}^\times$ auf.

Es sei C eine Klasse aus $\mathfrak{C}^{\mathfrak{G}}$. Um $h(C)$ zu definieren, wähle ich zunächst einen Divisor $\mathfrak{c}$ aus C

$$\mathfrak{c} \sim C \quad (1)$$ [5]).

Für $\sigma \in \mathfrak{G}$ gilt dann $\mathfrak{c}^{\sigma-1} \sim 1$. Es gibt daher Elemente $c_\sigma \neq 0$ in K, welche der Divisorgleichung

$$c_\sigma \cong \mathfrak{c}^{\sigma-1} \quad (2)$$ [6])

genügen. Ich setze

$$c_{\sigma,\tau} = \frac{c_\sigma^\tau c_\tau}{c_{\sigma\tau}}. \quad (3)$$

Aus (2) folgt $c_{\sigma,\tau} \cong 1$; die $c_{\sigma,\tau}$ sind daher Elemente aus $\mathsf{k}^\times$. Aus (3) folgt die Gültigkeit der Assoziativrelation

$$c_{\sigma,\tau}^2 c_{\sigma\tau,\varrho} = c_{\sigma,\tau\varrho} c_{\tau,\varrho},$$

welche besagt, daß $c_{\sigma,\tau}$ ein *Faktorsystem* zu $\mathfrak{G}$ in $\mathsf{k}^\times$ ist. Man beachte hierbei, daß $\mathfrak{G}$ die Elemente aus k festläßt, und daß daher in dieser Formel $c_{\sigma,\tau}^\varrho$ durch $c_{\sigma,\tau}$ ersetzt werden kann.

[4]) Für die Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionenkörper sei auf [2], §1 und die dort angegebene Literatur verwiesen.

[5]) Das Zeichen $\sim$ bedeutet Divisoräquivalenz.

[6]) Für das Zeichen $\cong$ lies: „divisorgleich".

Dieses Faktorsystem hängt nicht nur von der vorgegebenen Klasse C, sondern auch von der Wahl von $\mathfrak{c}$ und der c_σ gemäß (1) und (2) ab. $\mathfrak{c}$ kann gemäß (1) um den Hauptdivisor eines beliebigen Elements $b \neq 0$ aus K abgeändert werden; nach Wahl von $\mathfrak{c}$ kann dann c_σ gemäß (2) noch um ein beliebiges Element $a_\sigma \neq 0$ aus k abgeändert werden. Die erlaubten Abänderungssubstitutionen für die c_σ besitzen also die Form

$$c_\sigma \longrightarrow c_\sigma b^{\sigma-1} a_\sigma .$$

Dabei erfährt das Faktorsystem $c_{\sigma,\tau}$ nach (3) die Substitution

$$c_{\sigma,\tau} \longrightarrow c_{\sigma,\tau} \frac{a_\sigma a_\tau}{a_{\sigma\tau}} \qquad (a_\sigma \in \mathsf{k}).$$

Die *Klasse* von $c_{\sigma,\tau}$ ist also bei den erlaubten Substitutionen invariant. Ich bezeichne diese Klasse mit $h(C)$ und nenne sie die zu C gehörige *Hassesche Faktorsystemklasse.* Aus der Multiplikativität der Konstruktion (1), (2), (3) folgt unmittelbar, daß die Abbildung $C \to h(C)$ ein *Homomorphismus* von $\mathfrak{C}^{\mathfrak{G}}$ in $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$ ist; ich nenne ihn den *Hasseschen Homomorphismus*, weil er, wie wir sehen werden, das Hassesche Klassenkörperzerlegungsgesetz liefert.

9. Da $\mathfrak{G}$ aus Translationen besteht, so wird die Nullklassengruppe $\mathfrak{C}_0$ durch $\mathfrak{G}$ elementweise festgelassen; es ist also

$$\mathfrak{C}_0 < \mathfrak{C}^{\mathfrak{G}} \text{ [7]}.$$

Mithin ist $h(C)$ für jedes $C \in \mathfrak{C}_0$ definiert. *Für die Zwecke dieser Arbeit genügt es, h als Homomorphismus von $\mathfrak{C}_0$ in $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$ aufzufassen, was in Zukunft stets geschehen soll.* Es ist dann also

$$h: \qquad \mathfrak{C}_0 \longrightarrow H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times).$$

10. Ich berechne zuerst den *Kern* des Hasseschen Homomorphismus h. Er besteht aus allen denjenigen Nullklassen C, für welche $h(C) = 1$ gilt, also (mit den Bezeichnungen aus 8)

$$c_{\sigma,\tau} = \frac{a_\sigma a_\tau}{a_{\sigma\tau}}$$

mit gewissen Elementen $a_\sigma \neq 0$ aus k. Durch die erlaubte Substitution $c_\sigma \to c_\sigma a_\sigma^{-1}$ kann erreicht werden, daß $c_{\sigma,\tau} = 1$ gilt, also

$$c_\sigma^\tau c_\tau = c_{\sigma\tau}. \tag{4}$$

Jetzt verwende ich den bekannten „Hilbertschen Satz 90", welcher besagt, daß jedes Elementsystem $c_\sigma \in \mathsf{K}$, welches den Noetherschen Gleichungen (4) genügt, die Form $c_\sigma = b^{\sigma-1}$ mit $b \in \mathsf{K}$ besitzt. Durch die erlaubte Substitution $\mathfrak{c} \to \mathfrak{c}b^{-1}$ kann nunmehr erreicht werden, daß $c_\sigma \cong 1$ gilt, also

$$\mathfrak{c}^\sigma = \mathfrak{c}.$$

Aus $h(C) = 1$ folgt demnach, daß C einen Divisor $\mathfrak{c}$ enthält, welcher bei $\mathfrak{G}$ festbleibt. Offenbar gilt davon auch die Umkehrung.

Nun verwende ich die in 7 angegebene Voraussetzung, daß K/L *unverzweigt* ist. Daher sind die unter $\mathfrak{G}$ festbleibenden Divisoren $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{D}(\mathsf{K})$ dadurch gekennzeichnet,

---

[7]) Übrigens läßt sich leicht zeigen, daß $\mathfrak{C}^{\mathfrak{G}}$ aus all denjenigen Divisorklassen besteht, deren Grad $\equiv 0 \pmod{n_0}$ ist; $\mathfrak{C}^{\mathfrak{G}}/\mathfrak{C}_0$ ist folglich isomorph zur additiven Gruppe der ganzrationalen Zahlen. $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}^{\mathfrak{G}}$ ist zyklisch von der Ordnung n_0.

daß sie aus einem Divisor $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}(\mathsf{L})$ durch die Einbettung ε entstehen. Für die Klasse C von $\mathfrak{c}$ bedeutet das, daß $C = \varepsilon(D)$ gleich der Einbettung einer Divisorklasse $D \in \mathfrak{C}(\mathsf{L})$ ist. Aus der Einbettungs-Gradformel

$$\text{Grad}\ \big(\varepsilon(D)\big) = [\mathsf{K} : \mathsf{L}]\ \text{Grad}\ (D)$$

folgt, daß dabei $\text{Grad}(C) = 0$ mit $\text{Grad}(D) = 0$ gleichbedeutend ist. Zusammengenommen ergibt sich daher der folgende

Satz 1. *Genau dann ist $h(C) = 1$, wenn die Gleichung $C = \varepsilon(D)$ mit einer Nullklasse D von L lösbar ist. Der Kern des Hasseschen Homomorphismus h ist also gleich dem Bild des Multiplikators ε.*

Dieser Satz bildet die Grundlage für den Beweis des Hasseschen Klassenkörper-Zerlegungsgesetzes in § 3. Es ist dazu jedoch zunächst nötig, diesem Satz eine etwas andere Fassung zu geben. Das soll jetzt geschehen.

11. Es sei k' ein Erweiterungskörper von k, und Kk' die zugehörige Konstantenerweiterung von K. Die Gruppen $\mathfrak{D}(\mathsf{K})$, $\mathfrak{C}(\mathsf{K})$, $\mathfrak{C}_0(\mathsf{K})$ betten sich in natürlicher Weise in die entsprechenden Gruppen von Kk' ein. Und zwar ist diese Einbettung auch für Divisorklassen ein Isomorphismus, zufolge der in **7** angegebenen Voraussetzung über die Geschlechtsinvarianz bei Konstantenerweiterungen von K. Ich bezeichne diese Einbettung mit ι, indem ich ι als Operator im Exponenten schreibe.

$H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$ bettet sich ebenfalls in natürlicher Weise in $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}'^\times)$ ein, indem jedes Faktorsystem $c_{\sigma,\tau}$ in $\mathsf{k}^\times$ als ein Faktorsystem in $\mathsf{k}'^\times$ angesehen wird. Ich bezeichne diese Einbettung ebenfalls mit ι.

Es gilt dann die *Einbettungsformel*

$$h(C^\iota) = h(C)^\iota. \tag{5}$$

Denn wird $h(C)$ durch die Elemente c_σ, $c_{\sigma,\tau}$ gemäß (2) und (3) berechnet, so kann offenbar $h(C^\iota)$ durch dieselben Elemente berechnet werden.

Im Hinblick auf (5) kann nun der Satz 1 folgendermaßen ausgesprochen werden:

Satz 2. *Es sei k' ein Erweiterungskörper von k. Genau dann ist die Gleichung $C^\iota = \varepsilon(D)$ mit einer Nullklasse D von Lk' lösbar, wenn $h(C)^\iota$ zerfällt, wenn also für jedes Faktorsystem $c_{\sigma,\tau}$ aus $h(C)$ das Gleichungssystem*

$$c_{\sigma,\tau} = \frac{d_\sigma d_\tau}{d_{\sigma\tau}} \tag{6}$$

mit Elementen d_σ aus k' lösbar ist.

Ich benutze nun die aus der Multiplikatorentheorie bekannte Tatsache, daß es zu vorgegebenem C stets einen geeigneten Erweiterungskörper k' von k gibt, für den die Gleichung $C^\iota = \varepsilon(D)$ mit $D \in \mathfrak{C}_0(\mathsf{Lk}')$ lösbar ist[8]). Die Gesamtheit dieser Körper k' kann dann mit Hilfe von Satz 2 folgendermaßen beschrieben werden.

Zunächst folgt aus der Lösbarkeit von (6) in einem Erweiterungskörper k' von k, daß das Faktorsystem $c_{\sigma,\tau}$ kommutativ ist, d. h.

$$c_{\sigma,\tau} = c_{\tau,\sigma}.$$

Man beachte dazu, daß $\mathfrak{G}$ als Translationsgruppe kommutativ ist, daß also $\sigma\tau = \tau\sigma$ und daher erst recht $d_{\sigma\tau} = d_{\tau\sigma}$ ist. Mithin ist $h(C)$ eine *abelsche Faktorsystemklasse* im Sinne von Hasse [4].

---

[8]) Für einen Beweis dafür vgl. Fußnote [15]).

Ich bilde nun die zu $h(C)$ nach [4] gehörige *abelsche Algebra* Γ über k. Sie ist definiert durch eine k-Basis u_σ mit den Relationen

$$u_\sigma u_\tau = u_{\sigma\tau} c_{\sigma,\tau}.$$

Ihr Grad über k ist also gleich der Gruppenordnung n von $\mathfrak{G}$. Zufolge der in 7 angegebenen Charakteristik- und Einheitswurzelvoraussetzungen definiert jeder Charakter χ von $\mathfrak{G}$ einen Automorphismus $\alpha = \alpha_\chi$ von Γ über k vermöge

$$u_\sigma^\alpha = u_\sigma \chi(\sigma).$$

Die Abbildung $\chi \to \alpha_\chi$ ist ein Isomorphismus der Charaktergruppe $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{G}$ auf die volle Automorphismengruppe von Γ über k. Ich werde hier χ mit α_χ identifizieren, so daß $\mathfrak{X}$ selbst als die Automorphismengruppe von Γ über k erscheint.

Eine Lösung d_σ der Gleichung (6) in einem Erweiterungskörper k' von k definiert einen k-Homomorphismus γ von Γ in k' vermöge $u_\sigma^\gamma = d_\sigma$. Umgekehrt definiert diese Formel für jeden k-Homormorphismus γ von Γ in einen Erweiterungskörper k' von k eine Lösung d_σ von (6). Da nun Γ eine abelsche Algebra ist, so sind alle k-Homomorphismen von Γ in Körper zueinander konjugiert; sie entstehen also aus einem einzigen unter ihnen durch Multiplikation mit einem Automorphismus von Γ/k. Insbesondere folgt, daß die Bildkörper Γ^γ alle untereinander gleich sind. Diesen durch Γ, also durch $h(C)$ eindeutig bestimmten Erweiterungskörper von k nenne ich im Anschluß an Hasse den *Kernkörper* von $h(C)$; ich bezeichne ihn mit Γ_0. Er ist über k abelsch, und seine Automorphismengruppe ist zu einer Untergruppe von $\mathfrak{X}$ isomorph[9]).

Aus dem Gesagten folgt, daß die Gleichungen (6) genau dann in einem Erweiterungskörper k' von k lösbar sind, wenn k' den Kernkörper Γ_0 enthält. Daher folgt im Hinblick auf Satz 2

Satz 3. *Unter allen Erweiterungskörpern* k' *von* k, *für welche die Gleichung* $C^i = \varepsilon(D)$ *mit* $D \in \mathfrak{C}_0(\mathsf{L}\mathsf{k}')$ *lösbar ist, gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten Körper, nämlich den Kernkörper* Γ_0 *der Hasseschen Faktorsystemklasse* $h(C)$.

§ 3. Das Klassenkörper-Zerlegungsgesetz.

12. Zur Erleichterung für den Leser stellen wir die von uns zu benutzenden Begriffe und Sätze über Spezialisierungen und allgemeine Nullklassen voran.

Es sei k' ein Erweiterungskörper von k, und $\mathsf{K}\mathsf{k}'$ die zugehörige Konstantenerweiterung von K. Eine *Spezialisierung* von $\mathsf{K}\mathsf{k}'$ wird gegeben durch einen Körperhomomorphismus η von k' in einen anderen Erweiterungskörper k'' von k, wobei k elementweise festbleiben soll. η setzt sich eindeutig zu einem Körperhomomorphismus von $\mathsf{K}\mathsf{k}'$ in $\mathsf{K}\mathsf{k}''$ fort, wobei K elementweise festbleibt; der fortgesetzte Homomorphismus werde ebenfalls mit η bezeichnet.

Nach der allgemeinen Spezialisierungstheorie[10]) definiert η in natürlicher Weise einen Homomorphismus von $\mathfrak{D}(\mathsf{K}\mathsf{k})$, $\mathfrak{C}(\mathsf{K}\mathsf{k}')$, $\mathfrak{C}_0(\mathsf{K}\mathsf{k}')$ in die entsprechenden Gruppen von $\mathsf{K}\mathsf{k}''$, unter Erhaltung der Divisorgleichheit und Äquivalenz. Insbesondere entspricht jeder Nullklasse $C \in \mathfrak{C}_0(\mathsf{K}\mathsf{k}')$ eine Spezialisierung $C^\eta \in \mathfrak{C}_0(\mathsf{K}\mathsf{k}'')$.

Auch für das Hassesche Symbol $h(C)$ läßt sich eine Spezialisierung $h(C)^\eta$ definieren: Es sei $h(C)$ mit Hilfe der Elementsysteme c_σ gemäß 8, (2) konstruiert. Da die c_σ nur bis

[9]) Siehe dazu *Hasse* [4], S. 44.

[10]) Für diese vgl. [6], § 2. (Dort spreche ich nicht von Spezialisierungen, sondern von „Divisorenresten".) Die dort gemachte Voraussetzung, daß k algebraisch-abgeschlossen ist, ist unwesentlich.

auf Faktoren $\neq 0$ aus k' bestimmt sind, so können sie prim zu η normiert werden, also $c_\sigma^\eta \neq 0, \infty$. Dann ist auch $c_\sigma^{\tau\eta} = c_\sigma^{\eta\tau} \neq 0, \infty$[11]).

Folglich bilden die η-Bilder

$$c_{\sigma,\tau}^\eta = \frac{c_\sigma^{\eta\tau} c_\tau^\eta}{c_{\sigma\tau}^\eta}$$

ein Faktorsystem zu $\mathfrak{G}$ in k''. Dessen Klasse hängt offenbar nur von der Klasse $h(C)$ von $c_{\sigma,\tau}$ und von η ab; ich bezeichne sie mit $h(C)^\eta$ und nenne sie die *Spezialisierung* von $h(C)$.

Es gilt die *Restformel für das Hassesche Symbol*

$$h(C^\eta) = h(C)^\eta. \tag{7}$$

Ihr Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß die arithmetischen Relationen zwischen Divisoren und Divisorklassen bei Spezialisierung erhalten bleiben:

Aus	$\mathfrak{c} \sim C$	folgt	$\mathfrak{c}^\eta \sim C^\eta$;
aus	$c_\sigma \cong \mathfrak{c}^{\sigma-1}$	folgt	$c_\sigma^\eta \cong \mathfrak{c}^{\eta(\sigma-1)}$ [12]);
aus	$c_{\sigma,\tau} = \dfrac{c_\sigma^\tau c_\tau}{c_{\sigma\tau}}$	folgt	$c_{\sigma,\tau}^\eta = \dfrac{c_\sigma^{\eta\tau} c_\tau^\eta}{c_{\sigma\tau}^\eta}$.

Es folgt, wenn $h(C)$ durch die $c_{\sigma,\tau}$ berechnet wird, daß $h(C^\eta)$ durch deren Reste $c_{\sigma,\tau}^\eta$ berechnet werden kann, und das besagt gerade die Formel (7).

Die Einbettungsformel **11**, (5) ist übrigens ein Spezialfall der Restformel (7).

13. Eine *allgemeine Nullklasse* von K ist definiert als Nullklasse X einer Konstantenerweiterung $\mathsf{K}\mathsf{k}'$ von K mit der Eigenschaft, daß jede beliebige Nullklasse N einer Konstantenerweiterung $\mathsf{K}\mathsf{k}''$ von K aus X durch eine Spezialisierung hervorgeht; es soll also einen Körperhomomorphismus η von k' in k'' geben mit $X^\eta = N$. Es ist bekannt, daß es (zufolge des Riemann-Rochschen Satzes) stets eine allgemeine Nullklasse von K gibt. Ihr *Koordinatenkörper*[13]) $\mathsf{k}(X)$ ist definiert als der kleinste Zwischenkörper zwischen k und k', in welchem X rational ist; es soll also eine Klasse X_0 der Konstantenerweiterung $\mathsf{K} \cdot \mathsf{k}(X)$ geben derart, daß X aus X_0 durch Einbettung hervorgeht. Auch X_0 ist offenbar eine allgemeine Nullklasse von K; nach Ersetzung von X durch X_0 will ich stets X als Nullklasse von $\mathsf{K} \cdot \mathsf{k}(X)$ auffassen.

Als Erweiterungskörper von k ist $\mathsf{k}(X)$ ein separabel-erzeugbarer elliptischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper k[14]). Er ist seinem Typus nach durch K eindeutig bestimmt. Genauer gilt: Ist X_1 eine weitere allgemeine Nullklasse von K mit dem Koordinatenkörper $\mathsf{k}(X_1)$, so gibt es einen k-Isomorphismus η von $\mathsf{k}(X)$ auf $\mathsf{k}(X_1)$ mit $X^\eta = X_1$; überdies ist η dadurch eindeutig bestimmt.

---

[11]) Ich benutze hier die für jedes $x \in \mathsf{K}\mathsf{k}'$ geltende Formel $x^{\tau\eta} = x^{\eta\tau}$, wobei τ auf der linken Seite als Automorphismus von $\mathsf{K}\mathsf{k}'/\mathsf{k}'$ und auf der rechten Seite als Automorphismus von $\mathsf{K}\mathsf{k}''/\mathsf{k}''$ zu betrachten ist. Die Richtigkeit dieser Formel ergibt sich so: $\tau^{-1}\eta\tau$ ist ein Homomorphismus von $\mathsf{K}\mathsf{k}'$ in $\mathsf{K}\mathsf{k}''$, welcher in k' mit η zusammenfällt, und K elementweise festläßt. Wegen der eindeutigen Bestimmtheit von η durch diese Eigenschaften ist also $\tau^{-1}\eta\tau = \eta$.

[12]) Hierbei beachte man die in der letzten Fußnote gezeigte Vertauschungsregel $\sigma\eta = \eta\sigma$, welche sich auch auf die Spezialisierung von Divisoren überträgt; es ist also $\mathfrak{c}^{(\sigma-1)\eta} = \mathfrak{c}^{\eta(\sigma-1)}$.

[13]) Zum Begriff des Koordinatenkörpers vgl. *Roquette* [7].

[14]) Es ist bekannt, daß $\mathsf{k}(X)$ zu K isomorph ist. Da jedoch dieser Isomorphismus nicht in invarianter Weise dargestellt werden kann, und da er ferner bei der Verallgemeinerung auf beliebige abelsche Funktionenkörper siehe § 5) verloren geht, so werde ich von der Existenz dieses Isomorphismus bei den Beweisen hier keinen Gebrauch machen; lediglich die durch (8) gegebene „Dualität" zwischen K und $\overline{\mathsf{K}}$ spielt eine Rolle.

Ich setze nun $\bar{\mathsf{K}} = \mathsf{k}(X)$. Nach dem oben Gesagten ist dies ein elliptischer Funktionenkörper über k, welcher seinem Typus nach durch K eindeutig bestimmt ist. Ich nenne ihn den zu K *konjugierten* Funktionenkörper.

Die Nullklassen $C \in \mathfrak{C}_0(K)$ entsprechen umkehrbar eindeutig den rationalen Punkten $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\bar{\mathsf{K}}$ vermöge

$$X^{\bar{\mathfrak{p}}} = C; \tag{8}$$

hierbei bedeutet $\bar{\mathfrak{p}}$ im Exponenten die durch den Resthomomorphismus modulo $\bar{\mathfrak{p}}$ definierte Spezialisierung von $\mathsf{K}\bar{\mathsf{K}}$ auf K. Ich nenne $\bar{\mathfrak{p}}$ den zu C *konjugierten* Punkt von $\bar{\mathsf{K}}$.

Diese, durch (8) gegebene Dualität zwischen K und $\bar{\mathsf{K}}$ ist der Ausgangspunkt für die Formulierung und den Beweis des Zerlegungsgesetzes. Ich werde dazu eine Erweiterung $\bar{\mathsf{L}}$ von $\bar{\mathsf{K}}$ angeben — die zu K/L *konjugierte* Erweiterung — derart, daß die Zerlegung von $\bar{\mathfrak{p}}$ in $\bar{\mathsf{L}}$ durch das Hassesche Symbol $h(C)$ beschrieben wird.

14. Dazu löse ich die Gleichung

$$X^{\iota} = \varepsilon(Y) \tag{9}$$

durch eine Nullklasse Y einer geeigneten Konstantenerweiterung von $\mathsf{L}\bar{\mathsf{K}}$. Dabei bedeutet, genau wie in **11**, X^{ι} die Einbettung von X in die entsprechende Konstantenerweiterung von $\mathsf{K}\bar{\mathsf{K}}$. Wie schon in **11** erwähnt, ist die Lösung von (9) stets möglich.

Aus (9) entnehme ich für die Koordinatenkörper die Relation

$$\bar{\mathsf{K}} = \mathsf{k}(X) \subset \mathsf{k}(Y).$$

Folglich besitzt $\mathsf{k}(Y)/\mathsf{k}$ den Transzendenzgrad 1; also ist Y eine allgemeine Nullklasse von L. Der Körper $\bar{\mathsf{L}} = \mathsf{k}(Y)$ ist demnach vom Typus des zu L konjugierten Körpers. Ich nenne die Erweiterung $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ die zu K/L *konjugierte* Erweiterung. Sie ist ihrem Typus nach durch K/L eindeutig bestimmt. Ist nämlich Y' eine zweite Lösung von (9), so ist auch Y' eine allgemeine Nullklasse von L; es gibt daher einen Isomorphismus ω von $\bar{\mathsf{L}} = \mathsf{k}(Y)$ auf $\bar{\mathsf{L}}' = \mathsf{k}(Y')$ mit $Y^{\omega} = Y'$. Dabei gilt $\varepsilon(Y)^{\omega} = \varepsilon(Y^{\omega}) = \varepsilon(Y')$; der Isomorphismus ω läßt also X^{ι}, und daher auch seinen Koordinatenkörper $\mathsf{k}(X^{\iota}) = \mathsf{k}(X) = \bar{\mathsf{K}}$ (elementweise) fest. ω führt also die Erweiterung $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ in $\bar{\mathsf{L}}'/\bar{\mathsf{K}}$ über.

15. Aus der eben gezeigten Eindeutigkeit von $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ folgt im Hinblick auf den Satz 3 des vorigen Paragraphen, daß $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ gleich dem Kernkörper der Hasseschen Faktorsystemklasse $h(X)$ ist. Bevor wir daran gehen, diese Aussage für das Zerlegungsgesetz auszuwerten, soll sie zunächst dahingehend ergänzt werden, daß $\bar{\mathsf{L}}$ sogar *gleich* der zu $h(X)$ gehörigen abelschen Algebra selbst ist, daß die Faktorsystemklasse $h(X)$ also *irreduzibel* ist. Das liegt daran, daß X eine *allgemeine* Nullklasse ist, und wird so bewiesen:

Es genügt zu zeigen, daß die Automorphismengruppe von $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ isomorph ist zur *vollen* Charaktergruppe $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{G}$ (und nicht nur, wie es nach Satz 3 klar ist, zu einer Untergruppe von $\mathfrak{X}$).

Jeder Automorphismus ω von $\bar{\mathsf{L}}$ führt Y in eine Nullklasse Y^{ω} von $\mathsf{L}\bar{\mathsf{L}}$ über. Die Invarianz von $\bar{\mathsf{K}} = \mathsf{k}(X)$ ist dabei gleichbedeutend mit der Invarianz von X^{ι}, also mit der Tatsache, daß Y^{ω} ebenfalls eine Lösung von (9) ist. Es folgt $\varepsilon(Y^{\omega-1}) = 1$; die Nullklasse $Y^{\omega-1} = W$ gehört also dem Kern von ε an. Ich untersuche daher zunächst den Kern von ε.

Dazu benutze ich die Kummersche Theorie für K/L; die Gültigkeit dieser Theorie wird durch die in **7** gemachten Charakteristik- und Einheitswurzelvoraussetzungen gewährleistet. Nach dieser Theorie wird K/L erzeugt durch die multiplikative Gruppe W derjenigen Elemente $\neq 0$ aus K, deren n_0-te Potenz in L liegt. Für $w \in \mathsf{W}$ gilt

$$w^{\sigma-1} = \chi(\sigma) \qquad (\sigma \in \mathfrak{G}), \tag{10}$$

wobei χ ein durch w eindeutig bestimmter Charakter von $\mathfrak{G}$ ist. Die Abbildung $w \to \chi$ stiftet einen Isomorphismus zwischen der Faktorgruppe $\mathsf{W}/\mathsf{L}^\times$ und der Charaktergruppe $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{G}$.

Die Hauptdivisoren in K der Elemente w aus W sind nach (10) invariant unter $\mathfrak{G}$. Wegen der Unverzweigtheit von K/L entstehen sie daher aus gewissen Divisoren $\mathfrak{w} \in \mathfrak{D}(\mathsf{L})$ durch Einbettung. Aus Gradgründen ist sogar

$$\mathfrak{w} \in \mathfrak{D}_0(\mathsf{L}). \tag{11}$$

Genau dann ist $\mathfrak{w} \sim 1$, wenn $w \in \mathsf{L}^\times$ ist. Folglich ist die Abbildung $w \to \mathfrak{w}$ ein Isomorphismus von $\mathsf{W}/\mathsf{L}^\times$ auf eine gewisse Untergruppe $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{C}_0(\mathsf{L})$, welche konstruktionsgemäß offenbar gleich dem Kern von ε ist.

Durch Zusammensetzung der beiden angegebenen Isomorphismen liefert also die Kummersche Theorie einen Isomorphismus $\chi \to W_\chi$ von $\mathfrak{X}$ auf $\mathfrak{W}$.

Bemerkenswert ist dabei, daß dies nicht nur, wie eben, für die Erweiterung K/L selbst gilt, sondern genauso auch für jede Konstantenerweiterung, insbesondere also für $\mathsf{K}\bar{\mathsf{L}}/\mathsf{L}\bar{\mathsf{L}}$. Für jede Konstantenerweiterung ist also der Kern von ε isomorph zu $\mathfrak{X}$. Es folgt, daß sich der Kern von ε bei Konstantenerweiterungen nicht vergrößern kann; die Klassen $W \in \mathsf{L}\bar{\mathsf{L}}$ mit $\varepsilon(W) = 1$ sind also rational in k, besitzen also die Form $W_\chi^\varkappa$ mit geeignetem χ, wobei $\varkappa$ die Einbettung von L in $\mathsf{L}\bar{\mathsf{L}}$ bedeutet.

Daraus folgt nach obigem, daß für jeden Automorphismus ω von $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ gilt $Y^{\omega-1} = W_\chi^\varkappa$ mit einem durch ω eindeutig bestimmten $\chi \in \mathfrak{X}$. Auf diese Weise erhält man *jeden* Charakter χ. Denn sei W_χ die zugehörige Klasse in $\mathfrak{W}$; es ist $\mathsf{k}(Y) = \mathsf{k}(YW_\chi^\varkappa)$. Also ist auch $YW_\chi^\varkappa$ eine allgemeine Nullklasse, und die Zuordnung $Y \to YW_\chi^\varkappa$ definiert einen Automorphismus von $\mathsf{k}(Y) = \bar{\mathsf{L}}$, welcher wegen $\varepsilon(W_\chi^\varkappa) = 1$ den Körper $\mathsf{k}(X) = \bar{\mathsf{K}}$ festläßt. — Die Relation $Y^{\omega-1} = W_\chi^\varkappa$ definiert also einen *Isomorphismus* zwischen der Automorphismengruppe von $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ und $\mathfrak{X}$, was zu zeigen war[15]).

Daher ergibt sich der schon zu Beginn dieses Abschnitts angekündigte

Satz 4. *Ist X eine allgemeine Nullklasse von K, so ist die Hassesche Faktorsystemklasse $h(X)$ irreduzibel. Der zugehörige abelsche Körper über $\bar{\mathsf{K}}$ stimmt mit der zu K/L konjugierten Erweiterung $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ überein*[16]).

---

[15]) Die eben durchgeführte Schlußweise ist dieselbe, die man bei dem Nachweis der Lösbarkeit von (9) bei vorgegebener allgemeiner Nullklasse X von K verwendet. Dieser Nachweis verläuft folgendermaßen. Aus Isomorphiegründen ist es hinreichend, die Lösbarkeit von (9) für *irgendeine* allgemeine Nullklasse X zu zeigen; dann gilt sie für *alle* allgemeinen Nullklassen von K. Man geht daher in umgekehrter Richtung so vor: Man gibt eine allgemeine Nullklasse Y von L vor, und *definiert* X durch die Gleichung (9); zu zeigen ist, daß X eine *allgemeine* Nullklasse von K ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\mathsf{k}(X)$ denselben Transzendenzgrad über k besitzt wie $\mathsf{k}(Y)$, nämlich 1. Das bedeutet, daß es nur endlich viele Isomorphismen von $\mathsf{k}(Y)$ in seine algebraisch-abgeschlossene Hülle gibt, welche $\mathsf{k}(X)$ elementweise festlassen. Diese Isomorphismen besitzen nun nach der obigen Schlußweise die Form $Y \to YW_\chi^\varkappa$, sind also in der Tat von endlicher Anzahl. — Hat man so die Lösbarkeit von (9) für eine *allgemeine* Nullklasse X von K gezeigt, so ergibt sie sich in geläufiger Weise durch Spezialisierung für eine beliebig vorgegebene Nullklasse einer Konstantenerweiterung von K.

[16]) Man vgl. hierzu die Bemerkung in Abschnitt **18**.

16. Ich betrachte nunmehr die rationalen Punkte $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\bar{\mathsf{K}}$ und deren Zerlegungsverhalten in $\bar{\mathsf{L}}$. Zunächst gilt:

$\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ *ist unverzweigt.*

Diese Tatsache kann daraus gefolgert werden, daß $\bar{\mathsf{L}}$, $\bar{\mathsf{K}}$ beides elliptische Funktionenkörper sind, und daher nach der Hurwitzschen Relativgeschlechtsformel [17]) die Diskriminante von $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ gleich 1 ist. Sie ergibt sich aber auch durch direkte Rechnung folgendermaßen:

Nach Satz 4 ist $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ ein abelscher Körper mit der Faktorsystemklasse $h(X)$. Nach der Bildungsvorschrift in 8 enthält $h(X)$ ein Faktorsystem deə Form

$$x_{\sigma,\tau} = \frac{x_\sigma^\tau x_\tau}{x_{\sigma\tau}}$$

mit gewissen Elementen x_σ aus $\mathsf{K}\bar{\mathsf{K}}$, auf die es nur bis auf Faktoren aus $\bar{\mathsf{K}}$ ankommt.

Es sei nun $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Primdivisor von $\bar{\mathsf{K}}$. Ich setze $\bar{\mathfrak{p}}$ so zu einem Primdivisor von $\mathsf{K}\bar{\mathsf{K}}$ auf K fort, daß dabei K identisch bewertet wird; eine solche Fortsetzung ist bekanntlich auf genau eine Weise möglich. Ich bezeichne die Fortsetzung auch mit $\bar{\mathfrak{p}}$. Die Wertgruppe von $\bar{\mathfrak{p}}$ in $\mathsf{K}\bar{\mathsf{K}}$ ist dieselbe wie die von $\bar{\mathfrak{p}}$ in $\bar{\mathsf{K}}$; folglich können die x_σ durch geeignete Faktoren $\neq 0$ aus $\bar{\mathsf{K}}$ prim zu $\bar{\mathfrak{p}}$ normiert werden. Dann sind auch die x_σ^τ prim zu $\bar{\mathfrak{p}}$, denn aus Eindeutigkeitsgründen gilt $\bar{\mathfrak{p}}^\tau = \bar{\mathfrak{p}}$. Es folgt, daß bei der angegebenen Normierung der x_σ das Faktorsystem $x_{\sigma,\tau}$ aus $h(X)$ prim zu $\bar{\mathfrak{p}}$ ist.

Ist nun u_σ eine zu $x_{\sigma,\tau}$ gehörige Faktorbasis von $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ (gekennzeichnet durch die Relationen $u_\sigma u_\tau = u_{\sigma\tau} x_{\sigma,\tau}$), so ergibt sich, daß auch die u_σ prim zu $\bar{\mathfrak{p}}$ sind, und daß dies ferner auch für deren Diskriminante

$$\det\left(\operatorname{spur}(u_\sigma u_\tau)\right) = n^n \prod_\sigma x_{\sigma,\sigma^{-1}}$$

gilt. Es folgt, daß $\bar{\mathfrak{p}}$ unverzweigt ist in $\bar{\mathsf{L}}$, was zu zeigen war.

Nachdem nun $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ als unverzweigt erkannt ist, schließt man in geläufiger Weise, daß das Zerlegungsverhalten eines rationalen Punktes $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\bar{\mathsf{K}}$ in $\bar{\mathsf{L}}$ vollständig beschrieben wird durch die Struktur des Restklassenkörpers $\bar{\mathsf{L}}^{\bar{\mathfrak{q}}}$ von $\bar{\mathsf{L}}$ modulo einem Teiler $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{\mathfrak{p}}$ in $\bar{\mathsf{L}}$ [18]). Hierüber beweise ich nun den folgenden

Satz 5 (*Hassesches Zerlegungsgesetz*). *Das Zerlegungsverhalten eines rationalen Punktes $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\bar{\mathsf{K}}$ in $\bar{\mathsf{L}}$ wird beschrieben durch die Hassesche Faktorsystemklasse $h(C)$, wobei C die zu $\bar{\mathfrak{p}}$ konjugierte Nullklasse von K ist. Und zwar ist für einen Teiler $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{\mathfrak{p}}$ der Restklassenkörper $\bar{L}^{\bar{\mathfrak{q}}}$ gleich dem Kernkörper von $h(C)$.*

Insbesondere folgt also mit Hilfe von **10**, Satz 1, daß das Zerlegungsverhalten von $\bar{\mathfrak{p}}$ nur abhängt von der Restklasse von C modulo $\varepsilon(\mathfrak{C}_0(\mathsf{L}))$.

Beweis. Es sei $x_{\sigma,\tau}$ ein Faktorsystem aus $h(X)$, welches prim zu $\bar{\mathfrak{p}}$ normiert sei, und es sei u_σ mit

$$u_\sigma u_\tau = u_{\sigma\tau} x_{\sigma,\tau}$$

---

[17]) Vgl. z. B. *Hasse*, Zahlentheorie (Berlin 1949), S. 353, 4b.

[18]) Siehe *Hasse* [2], S. 49.

eine zugehörige Faktorbasis von $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$. Da die Diskriminante der u_σ, wie oben gezeigt, prim zu $\bar{\mathfrak{p}}$ ist, so bilden die u_σ eine $\bar{\mathfrak{p}}$-Ganzheitsbasis. Es folgt, daß $\bar{\mathsf{L}}^{\bar{\mathfrak{q}}}$ durch die Reste $u_\sigma^{\bar{\mathfrak{q}}}$ erzeugt wird. Andererseits bilden die $u_\sigma^{\bar{\mathfrak{q}}}$ eine Lösung von

$$x_{\sigma,\tau}^{\bar{\mathfrak{p}}} = \frac{u_\sigma^{\bar{\mathfrak{q}}}\, u_\tau^{\bar{\mathfrak{q}}}}{u_{\sigma\tau}^{\bar{\mathfrak{q}}}}$$

in einem Erweiterungskörper von k; der von ihnen erzeugte Körper ist also homomorphes Bild zu der dem Faktorsystem $x_{\sigma,\tau}^{\bar{\mathfrak{p}}}$ gehörigen abelschen Algebra über k. Es folgt, daß $\bar{\mathsf{L}}^{\bar{\mathfrak{q}}}$ der Kernkörper der Faktorsystemklasse $h(X)^{\bar{\mathfrak{p}}}$ ist.

Aus der Restformel **12**, (7) ergibt sich nun weiter: $h(X)^{\bar{\mathfrak{p}}} = h(X^{\bar{\mathfrak{p}}})$, und $X^{\bar{\mathfrak{p}}} = C$ ist die zu $\bar{\mathfrak{p}}$ konjugierte Klasse. Das ergibt die Behauptung.

17. In Hasse [2] lag der spezielle Fall der m-Teilung für eine natürliche Zahl m vor, welche nicht durch die Charakteristik von K teilbar ist. In diesem Fall ist $\mathsf{L} = \mathsf{K}^\mu$ ein isomorphes Bild von K (μ wird ein *Meromorphismus* von K genannt), und es gilt für $C \in \mathfrak{C}_0(\mathsf{K})$

$$\varepsilon(C^\mu) = C^m.$$

Aus Satz 5 ergibt sich daher, daß die Zerlegung von $\bar{\mathfrak{p}}$ umkehrbar eindeutig bestimmt ist durch die Restklasse von C modulo $\mathfrak{C}_0^m$, d. h. durch die sogenannte m-Klasse von C. Das ist das Hassesche Resultat.

Übrigens läßt sich auch das von Hasse zu seinem Beweis verwendete Formelsystem[19]) leicht in unserer Theorie wiederfinden. Es lautet in der hier benutzten Sprache der Theorie der Faktorsysteme

$$h(XC) = h(X)\, h(X)^{\bar{\mathfrak{p}}}.$$

In dieser Form ist es auf Grund unserer Ergebnisse trivial, denn erstens ist $h(XC) = h(X)\, h(C)$, und zweitens ist $h(X)^{\bar{\mathfrak{p}}} = h(X^{\bar{\mathfrak{p}}}) = h(C)$.

18. *Bemerkung zu Satz* 4. Beim Beweis von Satz 4 ergab sich auf zweierlei Arten ein Isomorphismus von $\mathfrak{X}$ auf die Automorphismengruppe von $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$. Der erste entstand dadurch, daß $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ als abelsche Algebra mit dem Faktorsystem $h(X)$ aufgefaßt wurde. Wir hatten demgemäß $\mathfrak{X}$ direkt mit der Automorphismengruppe von $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ identifiziert, und zwar folgendermaßen: Ist u_σ eine Faktorbasis für $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$, so wird

$$u_\sigma^{\chi-1} = \chi(\sigma).$$

Der zweite Isomorphismus $\chi \to \omega_\chi$ entstand dadurch, daß

$$Y^{\omega_\chi - 1} = W_\chi^\varkappa$$

gesetzt wurde; hierbei ist W_χ als Nullklasse von L dadurch gekennzeichnet, daß es für $\mathfrak{w}_\chi \sim W_\chi$ stets ein Element $w_\chi \in \mathsf{K}$ gibt mit

$$w_\chi \cong \varepsilon(\mathfrak{w}_\chi); \quad w_\chi^{\sigma-1} = \chi(\sigma).$$

Es ist von vornherein zu erwarten, daß diese beiden Isomorphismen übereinstimmen, daß also $\chi = \omega_\chi$ ist. In der Tat läßt sich dies folgendermaßen zeigen:

---

[19]) Vgl. [2], S. 59, Formel (3).

Es sei $x_{\sigma,\tau}$ das zur Faktorbasis u_σ gehörige Faktorsystem aus $h(X)$. Da $\bar{\mathsf{L}}$ unter $\mathfrak{G}$ elementweise festbleibt ($\bar{\mathsf{L}}$ fungiert in $\mathsf{K}\bar{\mathsf{L}}$ als Konstantenkörper), so ist $u_\sigma^\tau = u_\sigma$, also

$$x_{\sigma,\tau} = \frac{u_\sigma^\tau u_\tau}{u_{\sigma\tau}}.$$

Andererseits ist gemäß der Definition von $h(X)$

$$x_{\sigma,\tau} = \frac{x_\sigma^\tau x_\tau}{x_{\sigma\tau}}$$

mit gewissen Elementen $x_\sigma \in \mathsf{K}\bar{\mathsf{K}}$. Aus dem Hilbertschen Satz 90 folgt, daß die Quotienten $\frac{u_\sigma}{x_\sigma}$ die Form

$$\frac{u_\sigma}{x_\sigma} = b^{\sigma-1}$$

mit einem geeigneten Element $b \neq 0$ aus $\mathsf{K}\bar{\mathsf{L}}$ besitzen.

Als Elemente in $\mathsf{K}\bar{\mathsf{K}}$ sind die x_σ invariant unter $\mathfrak{X}$; daher bilden die $\frac{u_\sigma}{x_\sigma} = b^{\sigma-1}$ eine Faktorbasis für $\mathsf{K}\bar{\mathsf{L}}/\mathsf{K}\bar{\mathsf{K}}$. Folglich gelten die Gleichungen

$$b^{(\sigma-1)(\chi-1)} = \chi(\sigma). \tag{12}$$

Nun sind σ und χ als Automorphismen von $\mathsf{K}\bar{\mathsf{L}}$ miteinander vertauschbar. Die Gleichungen (12), gelesen für die Elemente $b^{\chi-1}$, besagen daher, daß die $b^{\chi-1}$ eine Faktorbasis für $\mathsf{K}\bar{\mathsf{L}}/\mathsf{L}\bar{\mathsf{L}}$ bilden. Folglich gilt

$$b^{\chi-1} \cong \varepsilon(\mathfrak{w}_\chi) \text{ mit Divisoren } \mathfrak{w}_\chi \sim W_\chi^\varkappa.$$

Andererseits berechne ich $b^{\chi-1}$ folgendermaßen: Definitionsgemäß gilt $x_\sigma \cong \mathfrak{x}^{\sigma-1}$, wobei $\mathfrak{x}$ ein Divisor $\sim X$ aus $\mathsf{K}\bar{\mathsf{K}}$ ist. Bei Einbettung in $\mathsf{K}\bar{\mathsf{L}}$ ergibt sich $x_\sigma \cong \mathfrak{x}^{\iota(\sigma-1)}$. Weil die u_σ im Konstantenkörper $\bar{\mathsf{L}}$ liegen, so folgt daraus

$$\mathfrak{x}^{-\iota(\sigma-1)} \cong b^{\sigma-1}.$$

Folglich bleibt $b \cdot \mathfrak{x}^\iota$ bei den Automorphismen $\sigma \in \mathfrak{G}$ fest, besitzt also die Form $\varepsilon(\mathfrak{z})$ mit einem Divisor $\mathfrak{z}$ von $\mathsf{L}\bar{\mathsf{L}}$. Weil $\mathfrak{x}$ in $\mathsf{K}\bar{\mathsf{K}}$ liegt, und dieser Körper unter χ invariant ist, folgt

$$b^{\chi-1} \cong \varepsilon(\mathfrak{z})^{\chi-1} \cong \varepsilon(\mathfrak{z}^{\chi-1}).$$

Zusammen mit der obigen Berechnung von $b^{\chi-1}$ erhält man $\varepsilon(\mathfrak{w}_\chi) = \varepsilon(\mathfrak{z}^{\chi-1})$, also, da die Einbettung ε für *Divisoren* ein Isomorphismus ist, $\mathfrak{w}_\chi = \mathfrak{z}^{\chi-1}$. Für die entsprechenden Klassen folgt

$$W_\chi^\varkappa = Z^{\chi-1}.$$

Die Definition von $\mathfrak{z}$ liefert ferner die Gleichung $X^\iota = \varepsilon(Z)$. Also besitzt Z die Form $Z = YW^\varkappa$ mit einer gewissen Nullklasse W aus dem Kern von ε. Da W rational in k ist, so gilt $W^{\varkappa\chi} = W^\varkappa$, also folgt $Z^{\chi-1} = Y^{\chi-1}$. Zusammengenommen ergibt sich

$$W_\chi^\varkappa = Y^{\chi-1} = Y^{\omega_\chi - 1},$$

also in der Tat $\chi = \omega_\chi$, wie behauptet.

Das bei der Rechnung auftretende Gleichungssystem (12) ist auch an sich interessant. Die Existenz eines Elements b, welches den Relationen (12) genügt, ist damit gleichbedeutend, daß nicht nur $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ die konjugierte Erweiterung von K/L, sondern auch umgekehrt K/L die konjugierte Erweiterung von $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ ist; sie drückt also eine gewisse Dualität zwischen K/L und $\bar{\mathsf{L}}/\bar{\mathsf{K}}$ aus. Ich will darauf hier nicht näher eingehen.

§ 4. Der Endlichkeitssatz.

19. Unter einem *Endlichkeitssatz* für den Hasseschen Homomorphismus h verstehe ich ein hinreichendes Kriterium für die Endlichkeit der Bildgruppe $h(\mathfrak{C}_0)$. Im allgemeinen wird ein solcher Endlichkeitssatz in der Angabe einer Bedingung für den Konstantenkörper k bestehen derart, daß, bei Erfülltsein dieser Bedingung, für *jeden* elliptischen Funktionenkörper K über k und für *jede* Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von K gemäß **7** die Bildgruppe $h(\mathfrak{C}_0)$ endlich ist.

Nach **10**, Satz 1 liefert jeder Endlichkeitssatz die Aussage, daß die Faktorgruppe $\mathfrak{C}_0(\mathsf{K})/\varepsilon(\mathfrak{C}_0(\mathsf{L}))$ endlich ist; im Falle der m-Teilung (siehe **17**) bedeutet das die Endlichkeit der m-Klassengruppe $\mathfrak{C}_0/\mathfrak{C}_0^m$.

20. Einen trivialen Endlichkeitssatz erhält man zunächst folgendermaßen: $h(\mathfrak{C}_0)$ ist eine Untergruppe von $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$. Die letztere ist sicher dann endlich, wenn die n-Klassengruppe $\mathsf{k}^\times/\mathsf{k}^{\times n}$ endlich ist. Es gilt daher:

Die Bildgruppe $h(\mathfrak{C}_0)$ des Hasseschen Homomorphismus ist endlich, falls $\mathsf{k}^\times/\mathsf{k}^{\times n}$ endlich ist.

Durch diesen Satz werden die folgenden Körper k erfaßt:

a) die endlichen Körper;
b) die Körper aller formalen Potenzreihen über einem endlichen Körper (man beachte dazu die in **7** gemachte Voraussetzung, daß n kein Vielfaches der Charakteristik von k ist);
c) die Henselschen $\mathfrak{p}$-adischen Körper;
d) die reell-abgeschlossenen Körper;
e) die algebraisch-abgeschlossenen Körper.

Bei all diesen Körpern ist die Struktur von $\mathsf{k}^\times/\mathsf{k}^{\times n}$ wohlbekannt und endlich.

21. Man verdankt Weil den folgenden nichttrivialen Endlichkeitssatz:

Die Bildgruppe $h(\mathfrak{C}_0)$ des Hasseschen Homomorphismus h ist endlich in den folgenden beiden Fällen:

f) *wenn k ein endlich-algebraischer Zahlkörper ist;*
g) *wenn k ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 mit endlichem Konstantenkörper ist.*

Diesen Satz bezeichnet man als den „schwachen" Weilschen Endlichkeitssatz. Sein Beweis verläuft wie folgt:

Es sei k ein Körper vom Typus f) oder g). Es sei p ein Primdivisor von k, und c eine Faktorsystemklasse aus $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$. Ich nenne c *prim* zu p, wenn es in c ein Faktorsystem $c_{\sigma,\tau}$ gibt, welches prim ist zu p. Allgemeiner nenne ich eine beliebige Teilmenge M von $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$ *prim* zu p, wenn jedes $c \in M$ prim ist zu p. Aus der Arithmetik des Körpers k wird nun das folgende bekannte Resultat benutzt:

Jede Untergruppe M von $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$, welche prim ist zu fast allen Primdivisoren p von k, ist endlich.

Dabei bedeutet „fast alle" soviel wie „alle bis auf endlich viele". Der Grund für die Gültigkeit dieses Satzes ist der Einheitensatz sowie der Satz von der Endlichkeit der Klassenzahl. Zur Erleichterung für den Leser werde ich für ihn in Abschnitt **23** einen Beweis geben.

Es folgt, daß der schwache Weilsche Endlichkeitssatz bewiesen ist, wenn die Richtigkeit des folgenden Satzes feststeht:

$h(\mathfrak{C}_0)$ *ist prim zu fast allen* p.

Dieser Satz findet sich im Grunde genommen schon bei Hasse [4] bewiesen, wenn auch nicht explizit ausgesprochen. Unser Beweis wird sich von dem bei Hasse gegebenen dadurch unterscheiden, daß er *nicht* das Zerlegungsgesetz verwendet, sondern *direkt*, auf Grund der Definition von h in 8, vorgeht. Dadurch kann die Verwendung der Distributionenlehre vermieden werden[20]).

22. Zum Beweis des obigen Satzes sei $h(C)$ eine beliebige Faktorsystemklasse aus $h(\mathfrak{C}_0)$, wobei $C \in \mathfrak{C}_0$ ist. Nach der in 8 angegebenen Bildungsvorschrift enthält $h(C)$ ein Faktorsystem der Form

$$c_{\sigma,\tau} = \frac{c_\sigma^\tau c_\tau}{c_{\sigma\tau}};$$

hierbei sind die c_σ gewisse Elemente $\neq 0$ aus K, auf die es nur bis auf Faktoren aus k ankommt.

Es sei nun p ein Primdivisor von k. Ich setze p zu einer Bewertung p_K von K fort; bekanntlich ist das stets möglich (sogar auf unendlich viele Weisen). Damit die $c_{\sigma,\tau}$ prim zu p sind, ist hinreichend, daß die c_σ und die c_σ^τ prim zu p_K sind. Ich versuche daher, die c_σ so durch geeignete Faktoren aus k abzuändern, daß dies der Fall ist.

Angenommen, es gälte

$$p_\mathsf{K}^\tau = p_\mathsf{K} \tag{13}$$

für alle $\tau \in \mathfrak{G}$. Dann reicht es schon hin, daß alle c_σ prim zu p_K gemacht werden.

Angenommen ferner, daß p_K dieselbe Wertgruppe besitzt wie p, daß also die Verzweigungsordnung von p_K über p gleich 1 ist, d. h.

$$e(p_\mathsf{K}/p) = 1. \tag{14}$$

Dann gibt es zu jedem c_σ ein Element $a_\sigma \neq 0$ aus k, dessen p-Wert derselbe ist wie der von c_σ; durch Multiplikation mit a_σ^{-1} kann dann c_σ prim zu p_K normiert werden.

Demnach ist $h(C)$ sicher dann prim zu p, wenn es eine Fortsetzung p_K von p gibt mit den Eigenschaften (13) und (14). Zu zeigen ist, daß dies für fast alle p der Fall ist.

Ich wähle dazu ein separierendes Element t von K, welches unter $\mathfrak{G}$ invariant ist (also in L liegt). Ich erzeuge $\mathsf{K}/\mathsf{k}(t)$ durch ein t-ganzes Element u; es sei

$$F(t, u) = u^r + g_{r-1}(t)\, u^{r-1} + \cdots = 0$$

die zugehörige absolut irreduzible Gleichung für t und u über k. Geht p nicht im Hauptnenner der Koeffizienten von F auf, so ist der p-Rest F^p definiert als dasjenige Polynom über dem Restkörper k^p, welches entsteht durch Ersetzung der Koeffizienten von F durch

[20]) Übrigens wurde die Möglichkeit der Vermeidung der Distributionenlehre im Spezialfall der 2-Teilung der elliptischen Funktionen bereits von *Weil* selbst erkannt; vgl. dazu *Weil*, Sur une theoreme de Mordell; Bull. Scienc. Math. **54**, 182—191 (1930); insbesondere S. 184f. Die Weilschen Überlegungen dort beruhen auf der Diskussion der 2-Teilungsformeln für die elliptischen Funktionen.

ihre p-Reste aus k^p. *Es ist bekannt, daß F^p absolut irreduzibel ist für fast alle p*[21]). Es genügt daher zu zeigen, daß p sicher dann eine Fortsetzung p_K mit den Eigenschaften (13) und (14) besitzt, wenn F^p irreduzibel ist.

Ich setze dazu p als *Funktionalprimdivisor* p_t von $\mathsf{k}(t)$ fort[22]). p_t ist dadurch eindeutig bestimmt, daß der Wert eines Polynoms $G(t) \in \mathsf{k}[t]$ bei der zu p_t gehörigen Bewertung gleich dem Minimum der p-Werte seiner Koeffizienten ist. Insbesondere ist also $e(p_t/p) = 1$.

Es gibt nur eine Fortsetzung p_K von p_t auf K. In der Tat genügt es zu zeigen, daß der Restklassengrad $f(p_\mathsf{K}/p_t)$ von p_K über p_t den höchstmöglichen Wert $r = [\mathsf{K} : \mathsf{k}(t)]$ annimmt. Dazu genügt es zu zeigen, daß die Gleichung für u^{p_K} über dem Restkörper von p_t den Grad r besitzt. Das besagt nun aber die für p vorausgesetzte Irreduzibilität von F^p.

Da es also nur eine Fortsetzung p_K von p_t gibt, so folgt (13), weil t und also auch p_t unter τ invariant sind.

Zum Beweis von (14) genügt es wegen $e(p_t/p) = 1$ und dem Produktsatz für die Verzweigungsordnungen zu zeigen, daß $e(p_\mathsf{K}/p_t) = 1$ ist. Nun gilt allgemein für das Produkt aus Restklassengrad und Verzweigungsordnung die Formel

$$e(p_\mathsf{K}/p_t)\, f(p_\mathsf{K}/p_t) \leqq [\mathsf{K} : \mathsf{k}(t)].$$

Wegen $f(p_\mathsf{K}/p_t) = [\mathsf{K} : \mathsf{k}(t)]$, wie eben gezeigt, folgt daraus in der Tat $e(p_\mathsf{K}/p_t) = 1$. Das war zu zeigen.

23. Wie schon in **21** angekündigt, soll jetzt noch ein Beweis für die in **21** benutzte Tatsache gegeben werden, daß jede zu fast allen p prime Untergruppe M von $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$ endlich ist.

Ich formuliere zunächst diesen Satz etwas anders. Vorgegeben sei eine Menge $\mathfrak{M}$ von Primdivisoren p von k, welche fast alle p enthält, jedoch im Falle eines Funktionenkörpers mindestens einen Primdivisor von k ausläßt; M sei die Gruppe *aller* zu $\mathfrak{M}$ primen Faktorsystemklassen aus $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$.

Dann lautet die Behauptung: *M ist endlich.*

Zum *Beweis* betrachte ich die Arithmetik in k in bezug auf $\mathfrak{M}$. Es sei demgemäß

$\mathfrak{D}_\mathfrak{M}$ die Gruppe derjenigen Divisoren von k, welche sich nur aus Primdivisoren von $\mathfrak{M}$ zusammensetzen[23]);

$\mathfrak{H}_\mathfrak{M}$ die Gruppe der $\mathfrak{M}$-Hauptdivisoren; diese entstehen aus den gewöhnlichen Hauptdivisoren von k durch Weglassen der nicht zu Primdivisoren aus $\mathfrak{M}$ gehörigen Bestandteile;

$\mathfrak{C}_\mathfrak{M}$ $= \mathfrak{D}_\mathfrak{M}/\mathfrak{H}_\mathfrak{M}$ die Gruppe der $\mathfrak{M}$-Divisorklassen;

$\mathsf{E}_\mathfrak{M}$ die Gruppe der $\mathfrak{M}$-Einheiten, bestehend aus allen Elementen $\neq 0$ aus k, deren $\mathfrak{M}$-Hauptdivisor gleich 1 ist.

Über diese Gruppen gelten die folgenden beiden, aus der Arithmetik der Zahl- und Funktionenkörper bekannten Sätze[24]):

1. *Der $\mathfrak{M}$-Einheitensatz: $\mathsf{E}_\mathfrak{M}$ besitzt endlich viele Erzeugende.*
2. *Der $\mathfrak{M}$-Klassensatz: $\mathfrak{C}_\mathfrak{M}$ ist endlich.*

---

[21]) Ein schöner Beweis dafür findet sich bei *Shimura* [8], S. 173, Lemma 3. Vgl. auch *Deuring* [1], S. 652.

[22]) Zum Begriff des Funktionalprimdivisors siehe z. B. *Hasse*, Zahlentheorie, S. 136.

[23]) Eigentlich müßte man genauer $\mathfrak{D}_\mathfrak{M}(\mathsf{k})$ schreiben, um den Körper k hervorzuheben, in welchem die Divisoren gebildet werden. Da sich aber k während dieses Beweises nicht ändert, so können wir zugunsten einer einfacheren Schreibweise auf die Angabe von k verzichten.

[24]) Vgl. z. B. *Artin-Whaples*, Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations. Bull. of the American Math. Soc. **51**, 469—492 (1945); insbesondere S. 491, Theorem 6 und 7.

Aus diesen Sätzen folgt:

1'. $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{E}_{\mathfrak{M}})$ *ist endlich.*

2'. $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{M}})$ *ist endlich.*

Wir werden diese beiden Endlichkeitsaussagen zum Beweis der Endlichkeit von M heranziehen. Ausgangspunkt dafür ist die folgende Beobachtung:

Jede Faktorsystemklasse $\boldsymbol{c}$ *aus* M *zerfällt in* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}$. *Das heißt, es gibt Divisoren* $\mathfrak{c}_\sigma$ *aus* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}$, *welche der Divisorgleichung*

$$\frac{\mathfrak{c}_\sigma \mathfrak{c}_\tau}{\mathfrak{c}_{\sigma\tau}} \cong c_{\sigma,\tau} \quad (\textit{für } \mathfrak{M}) \tag{15}$$

genügen, wobei $c_{\sigma,\tau}$ *ein Faktorsystem aus* $\boldsymbol{c}$ *ist.*

Da nämlich $\boldsymbol{c}$ prim ist zu jedem $p \in \mathfrak{M}$, gibt es zu vorgegebenem $c_{\sigma,\tau}$ aus $\boldsymbol{c}$ stets Elemente $c_\sigma(p)$ mit

$$\frac{c_\sigma(p)\, c_\tau(p)}{c_{\sigma\tau}(p)} \cong c_{\sigma,\tau} \quad (\text{für } p).$$

Um daher die Divisorgleichung (15) zu lösen, kann man setzen

$$\mathfrak{c}_\sigma = \prod_{p \in \mathfrak{M}} p^{w_p(c_\sigma(p))};$$

w_p bedeutet dabei die zu p gehörige, auf kleinsten positiven Wert 1 normierte Bewertung von k.

Ändert man die $\mathfrak{c}_\sigma$ in (15) um Hauptdivisoren ab, so ändert sich $c_{\sigma,\tau}$ im Sinne der $\mathfrak{M}$-Divisorgleichheit nur innerhalb seiner Klasse $\boldsymbol{c}$. Daher ist $\boldsymbol{c}$ im Sinne der $\mathfrak{M}$-Divisorgleichheit schon eindeutig bestimmt durch das System C_σ der $\mathfrak{M}$-Klassen der $\mathfrak{c}_\sigma$. Für dieses gilt nach (15)

$$C_\sigma C_\tau = C_{\sigma\tau},$$

d. h. die C_σ bilden in Abhängigkeit von σ einen Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{M}}$. Das System der C_σ ist folglich ein Element der Gruppe $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{M}})$ aller Homomorphismen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{M}}$. Nach 2' ist diese Gruppe endlich. Es folgt, daß es im Sinne der $\mathfrak{M}$-Divisorgleichheit nur endlich viele Faktorsystemklassen $\boldsymbol{c}$ in M gibt.

Zwei Faktorsysteme $c_{\sigma,\tau}$ und $d_{\sigma,\tau}$ sind genau dann $\mathfrak{M}$-divisorgleich, wenn ihr Quotient

$$\frac{c_{\sigma,\tau}}{d_{\sigma,\tau}} = e_{\sigma,\tau}$$

eine Einheit aus $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$ ist. Die $e_{\sigma,\tau}$ bilden ein Faktorsystem zu $\mathfrak{G}$ in $\mathsf{E}_{\mathfrak{M}}$. Da es nach 1' nur endlich viele Faktorsystemklassen $\boldsymbol{e}$ aus $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{E}_{\mathfrak{M}})$ gibt, folgt, daß es zu vorgegebenem $\boldsymbol{c}$ nur endlich viele $\boldsymbol{d}$ gibt, welche $\mathfrak{M}$-divisorgleich zu $\boldsymbol{c}$ sind. Das vollendet den Beweis.

24. *Bemerkung.* Die Schlußweisen im letzten Abschnitt lassen sich folgendermaßen in die allgemeine Kohomologietheorie einordnen: Man betrachte die beiden exakten Homomorphismenfolgen

$$1 \longrightarrow \mathfrak{H}_{\mathfrak{M}} \longrightarrow \mathfrak{D}_{\mathfrak{M}} \longrightarrow \mathfrak{C}_{\mathfrak{M}} \longrightarrow 1,$$
$$1 \longrightarrow \mathsf{E}_{\mathfrak{M}} \longrightarrow \mathsf{k}^\times \longrightarrow \mathfrak{H}_{\mathfrak{M}} \longrightarrow 1.$$

Es sei δ_1 der zur ersten Folge gehörige kohomologietheoretische Randoperator. Er bildet $H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{M}})$ in $H^{r+1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_{\mathfrak{M}})$ ab, und zwar derart, daß die Folge

$$H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{M}}) \longrightarrow H^{r+1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_{\mathfrak{M}}) \longrightarrow H^{r+1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{M}})$$

exakt ist. Nach dem Klassensatz ist nun $H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}_{\mathfrak{M}})$ endlich. Daher folgt (nach Ersetzung von r durch $r-1$):

Der Kern des zur ersten der obigen Folgen gehörigen Homomorphismus

$$H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_{\mathfrak{M}}) \longrightarrow H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{M}})$$

ist endlich.

Aus der zweiten der obigen exakten Folgen ergibt sich für die Kohomologiegruppen die exakte Folge

$$H^r(\mathfrak{G}, \mathsf{E}_{\mathfrak{M}}) \longrightarrow H^r(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times) \longrightarrow H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_{\mathfrak{M}}).$$

Nach dem Einheitensatz ist $H^r(\mathfrak{G}, \mathsf{E}_{\mathfrak{M}})$ endlich. Es folgt also zweitens:

Der Kern des zur zweiten der obigen Folgen gehörigen Homomorphismus

$$H^r(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times) \longrightarrow H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_{\mathfrak{M}})$$

ist endlich.

Nehmen wir beide Homomorphismen zusammen, so erhalten wir

$$H^r(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times) \longrightarrow H^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}),$$

und es folgt, daß auch der Kern dieses Homomorphismus endlich ist. Dieser Homomorphismus entsteht, um es noch einmal zu sagen, dadurch, daß man die Elemente aus $\mathsf{k}^\times$ als Divisoren in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}$ betrachtet.

Hier interessiert der Fall $r = 2$. Für diesen besagt (15), daß die zu untersuchende Untergruppe M von $H^2(\mathfrak{G}, \mathsf{k}^\times)$ auf 1 abgebildet wird. Folglich liegt M im Kern, ist also endlich.

§ 5. Verallgemeinerung für beliebige abelsche Funktionenkörper.

Gemäß dem in der Einleitung Gesagten verallgemeinere ich jetzt die in §§ 2 bis 4 erhaltenen Beweise und Resultate auf den Fall eines beliebigen abelschen Funktionenkörpers. Ich führe die Verallgemeinerung in der Form durch, daß ich für die einzelnen Abschnitte der §§ 2 bis 4 die anzubringenden Änderungen angebe, sowie die zu benutzenden Sätze über abelsche Funktionenkörper zitiere.

Zu 7. K soll jetzt ein abelscher Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper k sein. Ich verstehe darunter einen solchen Funktionenkörper über k, welcher als Modell eine abelsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{A}$ im Sinne von Weil [11] besitzt. $\mathcal{A}$ ist durch K bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt ([11], S. 34, Th. 9). Die Dimension a von $\mathcal{A}$ ist gleich dem Transzendenzgrad von K über k. Es ist bekannt, daß jeder abelsche Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 elliptisch ist ([11], S. 69, Pr. 14); umgekehrt ist jeder elliptische Körper in dem in **7** angegebenen Sinne gleichzeitig ein abelscher ([11], S. 67, Th. 18).

$\mathfrak{D}$ sei jetzt die Divisorgruppe von K in bezug auf das Modell $\mathcal{A}$. Die Primdivisoren von $\mathfrak{D}$ entsprechen also den in der Weilschen Termologie sogenannten „prime rational cycles of dimension $a - 1$". Die Divisorklassengruppe $\mathfrak{C}$ ist die Faktorgruppe von $\mathfrak{D}$ modulo der zugehörigen Hauptdivisorgruppe.

$\mathfrak{D}_0$ sei jetzt die Gruppe der algebraisch zu 0 äquivalenten Divisoren aus $\mathfrak{D}$ (zu dem im allgemeinen Falle nicht ganz einfach zu fassenden Begriff der algebraischen Äquivalenz siehe z. B. [12], S. 110). Die Hauptdivisorgruppe von $\mathfrak{D}$ ist in $\mathfrak{D}_0$ enthalten ([12], S. 110); es sei $\mathfrak{C}_0$ die zu $\mathfrak{D}_0$ gehörige Divisorklassengruppe. Dies ist die *Nullklassengruppe* von K.

Die Charakteristik- und Einheitswurzelvoraussetzungen über $\mathfrak{G}$ sind im allgemeinen Falle dieselben wie die in **7**.

Die Voraussetzung, daß K/L unverzweigt ist, ist gleichbedeutend damit, daß auch L ein abelscher Funktionenkörper ist. Dies wiederum besagt, daß $\mathfrak{G}$ aus lauter Translationsautomorphismen besteht ([11], S. 42, Th. 12, Cor.; sowie [9], S. 1040, Th. 1).

ε sei wie in **7** definiert.

Zu 8 und 9. Die Definition von h ist im allgemeinen Fall dieselbe wie dort. Die Tatsache, daß $\mathfrak{C}_0$ invariant ist unter $\mathfrak{G}$, ist in [12], S. 123, Prop. 3 bewiesen.

Zu 10 und 11. Alle Schlußweisen lassen sich wörtlich auch im allgemeinen Falle führen.

Zu 12 bis 14. Der Beweis für die Restformel (7) überträgt sich wörtlich. — Die Existenz einer allgemeinen Nullklasse X von K wurde von Matsusaka [10] bewiesen. Der zu K konjugierte Körper $\overline{\mathsf{K}}$ wird in der Literatur auch „Picardscher" Funktionenkörper zu K genannt. Dieser ist ein abelscher Funktionenkörper über k, und seine Punkte $\overline{\mathfrak{p}}$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Nullklassen C von K vermöge der Gleichung (8).

Zu 15. Der Beweis überträgt sich wörtlich. Wichtig ist die dortige Relation (11), welche besagt, daß aus $\varepsilon(\mathfrak{w}) \sim 1$ folgt $\mathfrak{w} \in \mathfrak{D}_0(\mathsf{L})$. Da $\varepsilon(\mathfrak{w}) \sim 1$ sicher $\mathfrak{w}^{n_0} \sim 1$ zur Folge hat — auf Grund der Kummerschen Theorie —, so ergibt sich die Gültigkeit von (11) aus einer Bemerkung von A. Weil ([12], S. 123, 5. Abschnitt; Bemerkung in Klammern).

Zu 16—24. Alles weitere überträgt sich wörtlich ohne Änderung. Nur in **22**, beim Beweis der Erfüllbarkeit von (13) und (14), ist das dortige separierende Element t von l durch eine separierende Transzendenzbasis zu ersetzen.

Literatur zu §§ 1 bis 4.

[1] *M. Deuring*, Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers. Math. Zeitschr. **47**, 643—654 (1942).

[2] *H. Hasse*, Der n-Teilungskörper eines abstrakten elliptischen Funktionenkörpers als Klassenkörper, nebst Anwendung auf den Mordell-Weilschen Endlichkeitssatz, Math. Zeitschr. **48**, 48—66 (1942).

[3] *H. Hasse*, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper. Jahresber. Deutsche Math. Ver. **52**, 1—48 (1942).

[4] *H. Hasse*, Existenz und Mannigfaltigkeit abelscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers. Math. Nachr. **1**, 40—61 (1948).

[5] *Y. Kawada-J. Tate*, On the Galois cohomology of unramified extensions of function fields in one variable. Amer. J. Math. **57**, 197—217 (1955).

[6] *P. Roquette*, Arithmetische Untersuchung des abelschen Funktionenkörpers, der einem algebraischen Funktionenkörper höheren Geschlechts zugeordnet ist. Abh. Math. Sem. Hamburg **18**, 144—178 (1952).

[7] *P. Roquette*, Zur Theorie der Konstantenerweiterungen algebraischer Funktionenkörper. Abh. Math. Sem. Hamburg **19**, 269—276 (1955).

[8] *G. Shimura*, Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field. Amer. J. Math. **57**, 134—176 (1955).

Literatur zu § 5.

[9] *W. L. Chow*, On the quotient variety of an abelian variety. Proc. Nat. Acad. Sciences **38**, 1039—1044 (1952).

[10] *T. Matsusaka*, On the algebraic construction of the Picard variety I, II. Japanese J. Math. **21**, 217—235 (1951); **22**, 51—62 (1952).

[11] *A. Weil*, Varietés abeliennes et courbes algébriques, Act. Sci. et industr. **1064**; Paris 1948.

[12] *A. Weil*, Sur les critères d'équivalence en géometrie algébrique. Math. Ann. **128**, 95—127 (1954).

Eingegangen 20. Juli 1955.

Bemerkungen zur Algebrentheorie.

Von *Günter Mitas* in Hamburg.

Die Ergebnisse dieser Note werden zu zwei weiteren Noten, [5] und [6], die sich mit Konstruktivitätsfragen befassen, benötigt. Dort wird nämlich von drei Sätzen der Körpertheorie die Übertragung auf die entsprechenden Sätze der Algebrentheorie verlangt. Diese drei Sätze sind: 1. Eine von einem Element a erzeugte Körpererweiterung ist genau dann separabel, wenn a separabel, d. h. Nullstelle eines separablen Polynoms ist. 2. Sind K/Ω und Λ/K endlich-algebraische Körpererweiterungen, so ist Λ/Ω genau dann separabel, wenn K/Ω und Λ/K separabel sind. 3. Der Abelsche Satz vom primitiven Element. — Dabei sollen die Beweise dieser Sätze der Algebrentheorie konstruktiv sein, und es soll nichts vorausgesetzt werden, was in jenen Noten erst entwickelt werden soll oder in den Anwendungsbereich jener Noten gehört. Dazu gehören insbesondere die Struktursätze von Wedderburn und die Existenz von Zerfällungskörpern. Von der Existenz der Primfaktorzerlegung eines Polynoms wird ebenfalls kein Gebrauch gemacht. Ebenso werden der Satz von Hollkott [2] und die Konstruktionen von Endler [1] nicht benutzt. Die Separabilität wird durch ein Determinantenkriterium erklärt. — Durch diese drei Noten sind dann wichtige Bausteine zusammengetragen, die einen Aufbau der Algebra gestatten, der konstruktiv ist und bei dem (was teilweise eine Folge davon ist) möglichst weitgehend die Körpertheorie durch die entsprechenden Teile der Algebrentheorie ersetzt ist.

§ 1. Die Separabilität von Algebren, die von einem Element erzeugt werden.

1. Zunächst seien zwei Definitionen gegeben.

1) Ein Körper heißt *explizit bekannt*, wenn folgendes der Fall ist:

Sei ein endlicher oder abzählbarer Vorrat von Symbolen $\alpha, \beta, \ldots$ mit den beiden nachstehenden Eigenschaften gegeben. 1. Von je zwei Symbolen α, β kann in endlich vielen Schritten entschieden werden, ob $\alpha = \beta$ oder $\alpha \neq \beta$ gilt. 2. Die vier Körperoperationen lassen sich mit den Symbolen in endlich vielen Schritten durchführen. — Die Elemente des Körpers sind dann die Klassen gleicher Symbole, gerechnet wird jedoch mit den Symbolen selbst.

Diese Definition des explizit bekannten Körpers ist etwas schwächer als die von v. d. Waerden [7] und M. Kneser [3] gegebene.

2) Eine Algebra heißt *regulär-separabel*, wenn folgendes der Fall ist:

Sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von $\mathfrak{A}/\Omega$. Die reguläre Spur $S(a)$ eines Elements a ist als Spur der regulären Darstellungsmatrix von a erklärt. Die n-reihige Matrix $\Gamma = (S(u_i u_k))_{ik}$ heißt die *reguläre Diskriminantenmatrix* und deren Determinante $\gamma = |S(u_i u_k)|_{ik}$ die *reguläre Diskriminante* der Algebra $\mathfrak{A}/\Omega$ bezüglich der Basis $u_1, \ldots, u_n$. Die Algebra $\mathfrak{A}/\Omega$ heißt dann regulär separabel, wenn Γ regulär ist. Der Begriff „regulär-separabel" ist invariant gegen Basistransformation und Erweiterung des Grundkörpers.

Bei kommutativer Algebra $\mathfrak{A}$ und bei $\chi(\Omega) = 0$ (oder $> n$) stimmt dieser Begriff mit dem Begriff „separabel" (d. i. halbeinfach und bei jeder Grundkörpererweiterung halbeinfach) überein, sonst ist er etwas stärker (siehe auch [6], § 2).

2. Gegeben sei ein explizit bekannter Körper Ω. Der Hauptsatz dieses Paragraphen lautet:

Satz 1. 1. *Ein Restklassenring nach einem Polynom*

$$\mathfrak{A} = \Omega[\eta] \bmod f(\eta),$$

ist als Algebra $\mathfrak{A}/\Omega$ genau dann regulär-separabel, wenn das Polynom $f(\eta)$ mit seiner Ableitung teilerfremd ist.

Zum Beweise wird die Teilerfremdheit von $f(\eta)$ und $f'(\eta)$ in Determinantenform geschrieben und diese Determinante in die reguläre Diskriminante Γ von $\mathfrak{A}/\Omega$ bezüglich der Basis $e, c, \ldots, c^{n-1}$ umgeformt. (Es wird $1 \bmod f(\eta) = e$, $\eta \bmod f(\eta) = c$ gesetzt.)

Das Polynom $f(\eta) = \eta^n + \alpha_{n-1}\eta^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ ist bekanntlich genau dann mit seiner Ableitung teilerfremd, wenn die Resultante der Polynome $f(\eta)$ und $f'(\eta)$ (Polynomdiskriminante von $f(\eta)$), nämlich

$$(1.\,1)\qquad \varrho = \left|\begin{array}{cccccccc} 1 & \alpha_{n-1} & & & \cdots & \alpha_0 & & \\ & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ & & 1 & \alpha_{n-1} & & & \cdots & \alpha_0 \\ & & & n & (n-1)\,\alpha_{n-1} & & \cdots & \alpha_1 \\ & & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & & \cdot & \\ n & (n-1)\,\alpha_{n-1} & & & \cdots & \alpha_1 & & \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n-1 \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n \end{array},$$

von null verschieden ist.

Es wird

$$(1.\,2)\qquad \begin{array}{l} \alpha_n = 1 \\ \alpha_i = 0 \text{ für } i = -1, -2, \ldots, n+1, n+2, \ldots \end{array}$$

und weiter

$$(1.\,3)\qquad \left.\begin{array}{l} \gamma_i^{(0)} = i\alpha_i \\ \gamma_i^{(k+1)} = \gamma_i^{(k)} - \alpha_{i+k}\gamma_{n-k}^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots) \end{array}\right\} (i = 0, 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots)$$

gesetzt und nacheinander in der Determinante (1. 1) von der $(n+i)$-ten Zeile die mit $\gamma_n^{(0)}$ multiplizierte $(n-i)$-te Zeile $(i = 1, \ldots, n-1)$, die mit $\gamma_{n-1}^{(1)}$ multiplizierte $(n-i+1)$-te Zeile $(i = 2, \ldots, n-1), \ldots$, die mit $\gamma_2^{(n-2)}$ multiplizierte $(n-1)$-te Zeile $(i = n-1)$ abgezogen. Dann ist

$$(1.\,4)\qquad \varrho = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_0 & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_0 \\ & & \gamma_n^{(0)} & \cdots & \gamma_1^{(0)} \\ & & \cdot & \cdots & \cdot \\ & & \cdot & \cdots & \cdot \\ & & \gamma_1^{(n-1)} & \cdots & \gamma_{-n+2}^{(n-1)} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} \gamma_n^{(0)} & \cdots & \gamma_1^{(0)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma_1^{(n-1)} & \cdots & \gamma_{-n+2}^{(n-1)} \end{array}\right|.$$

In der durch (1. 4) gegebenen n-reihigen Determinante wird dann nacheinander die mit α_{n-k+1} multiplizierte 1-te Spalte von der k-ten Spalte ($k = 2, \ldots, n$), die mit α_{n-k+2} multiplizierte 2-te Spalte von der k-ten Spalte ($k = 3, \ldots, n$), ..., die mit α_{n-1} multiplizierte $(n-1)$-te Spalte von der n-ten Spalte abgezogen.

Damit ist schließlich

$$(1.5) \qquad \varrho = \begin{vmatrix} \gamma_n^{(0)} & \cdots & \gamma_1^{(n-1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma_1^{(n-1)} & \cdots & \gamma_{-n+2}^{(2n-2)} \end{vmatrix}.$$

Die Diskriminante von $\mathfrak{A}/\Omega$ bezüglich der Basis $e, c, \ldots, c^{n-1}$ hat anderseits die Form $\gamma = |S(c^{i+k})|_{ik} = |\sigma_{i+k}|_{ik}$ ($i, k = 0, \ldots, n-1$), so daß Satz 1. 1 bewiesen ist, wenn die Richtigkeit der Formel

$$(1.6) \qquad \gamma_{n-k}^{(k)} = \sigma_k \qquad (k = 0, \ldots, 2n-2)$$

gezeigt ist. Dies soll jetzt geschehen. Mit

$$(1.7) \qquad c^m = \beta_0^{(m)} e + \cdots + \beta_{n-1}^{(m)} c^{n-1} \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

ist

$$(1.8) \qquad \sigma_k = \beta_0^{(k)} + \cdots + \beta_{n-1}^{(k+n-1)} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Dabei ist speziell

$$(1.9) \qquad \beta_i^{(m)} = \delta_{im} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ für } i \neq m \\ 1 \text{ für } i = m \end{Bmatrix} \text{ und } m, i = 0, \ldots, n-1.$$

Ferner folgt aus

$$c^l f(c) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i c^{i+l} = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots)$$

die Formel

$$(1.10) \quad \beta_j^{(m)} = -\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_j^{(i+m-n)} \qquad (j = 0, \ldots, n-1;\ m = n, n+1, \ldots).$$

Nun sind für $k = 0$ beide Seiten der Formel (1. 6) gleich n ((1. 2), (1. 3), (1. 8), (1. 9)). Der Beweis von (1. 6) wird daher unter der Annahme geführt, daß die Formeln

$$\gamma_n^{(0)} = \sigma_0, \ldots, \gamma_{n-k+1}^{(k-1)} = \sigma_{k-1}$$

schon bewiesen sind. Nach (1. 3) ist dann einerseits

$$\begin{aligned} \gamma_{n-k}^{(k)} &= \gamma_{n-k}^{(k-1)} - \alpha_{n-1}\gamma_{n-k+1}^{(k-1)} \\ &= \gamma_{n-k}^{(k-1)} - \alpha_{n-1}\sigma_{k-1} \\ &= \gamma_{n-k}^{(k-2)} - \alpha_{n-2}\sigma_{k-2} - \alpha_{n-1}\sigma_{k-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \gamma_{n-k}^{(0)} - \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{n-k+l}\sigma_l \\ &= \begin{cases} (n-k)\,\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k}\sigma_0 - \cdots - \alpha_{n-1}\sigma_{k-1} & \text{für } k = 1, \ldots, n-1 \\ \qquad\qquad - \alpha_0\sigma_{k-n} - \cdots - \alpha_{n-1}\sigma_{k-1} & \text{für } k = n, \ldots, 2n-2. \end{cases} \end{aligned}$$

Anderseits ist für $k = 1, \ldots, n-1$ bei mehrmaliger Anwendung von (1. 9), (1. 10)

$$\begin{aligned}
\sigma_k &= \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^{(k+i)} \\
&= \sum_{i=n-k}^{n-1} \beta_i^{(k+i)} \\
&= -\sum_{=n-k}^{n-1} (\alpha_0 \beta_i^{(k+i-n)} + \cdots + \alpha_{n-1} \beta_i^{(k+i-1)}) \\
&= -\sum_{i=n-k}^{n-1} (\alpha_{n-k} \beta_i^{(i)} + \cdots + \alpha_{n-1} \beta_i^{(k+i-1)}) \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{n-k} \beta_i^{(i)} + \cdots + \alpha_{n-1} \beta_i^{(k+i-1)}) + (n-k)\, \alpha_{n-k} \\
&= -\alpha_{n-k} \sigma_0 - \cdots - \alpha_{n-1} \sigma_{k-1} + (n-k)\, \alpha_{n-k}
\end{aligned}$$

und für $k = n, \ldots, 2n-2$ bei Anwendung von (1. 10)

$$\begin{aligned}
\sigma_k &= \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^{(k+i)} \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_0 \beta_i^{(k+i-n)} + \cdots + \alpha_{n-1} \beta_i^{(k+i-1)} \\
&= -\alpha_0 \sigma_{k-n} - \cdots - \alpha_{n-1} \sigma_{k-1}.
\end{aligned}$$

Damit ist (1. 6) bewiesen.

3. Aus dem Beweisgang von Satz 1. 1 ergibt sich der schärfere

Satz 1. 2. *Die Polynomdiskriminante ϱ des Polynoms $f(\eta)$ in der Schreibweise von* (1. 1) *ist gleich der regulären Diskriminante γ der Restklassenalgebra*

$$\mathfrak{A} = \Omega[\eta] \bmod f(\eta)$$

bezüglich der Basis

$$1 \bmod f(\eta),\ \eta \bmod f(\eta), \ldots, \eta^{n-1} \bmod f(\eta).$$

§ 2. Algebren, die über Algebren erklärt sind.

1. Gegeben sei ein explizit bekannter Körper Ω. Über Ω sei eine Algebra $\mathfrak{B}$ vom Range ν mit Einselement erklärt und über $\mathfrak{B}$ sei wieder eine Algebra $\mathfrak{A}$ vom Range n erklärt. Dabei soll $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}\widetilde{\mathfrak{B}}$ erzeugt werden, wo $\widetilde{\mathfrak{B}}$ ein elementweise mit $\mathfrak{B}$ vertauschbarer Ω-Modul ist. $\mathfrak{B}$ heißt *Teilalgebra* von $\mathfrak{A}$.

Es wird untersucht, wie sich die reguläre Darstellung, die reguläre Spur und die reguläre Diskriminantenmatrix von $\mathfrak{A}/\Omega$ aus den entsprechenden Bildungen für $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}/\Omega$ zusammensetzen.

2. Zunächst machen wir einige bezeichnungstechnische Vorbemerkungen.

1.) In diesem Paragraphen laufen griechische (lateinische) Indizes unabhängig voneinander von 1 bis ν (von 1 bis n). Indizes werden auch oben gesetzt (um Übereinstimmung mit [6] zu erhalten). Potenzen kommen nicht vor.

2.) Sind

$$\begin{aligned}
\mathsf{A} &= (\alpha_{ik})_{ik} \qquad (i = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, s), \\
\bar{\mathsf{A}} &= (\bar{\alpha}_{\bar{i}\bar{k}})_{\bar{i}\bar{k}} \qquad (\bar{i} = 1, \ldots, \bar{r};\ \bar{k} = 1, \ldots, \bar{s})
\end{aligned}$$

zwei Matrizen, so wird unter dem Kroneckerprodukt $\mathsf{A} \times \bar{\mathsf{A}}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A}\bar{\alpha}_{11} & \cdots & \mathsf{A}\bar{\alpha}_{1\bar{s}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathsf{A}\bar{\alpha}_{\bar{r}1} & \cdots & \mathsf{A}\bar{\alpha}_{\bar{r}\bar{s}} \end{pmatrix}$$

von $r \cdot \bar{r}$ Zeilen und $s \cdot \bar{s}$ Spalten verstanden.

3. Sei v_ϱ eine Basis von $\mathfrak{B}/\Omega$, u_i eine Basis von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ mit $u_i v_\varrho = v_\varrho u_i$. Mit

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_\nu \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}$$

entsteht die reguläre Darstellungsmatrix $\mathsf{M}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(a)$ des Elements a aus $\mathfrak{A}$ durch

$$\mathfrak{u}a = \mathsf{M}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(a)\,\mathfrak{u} = (b_i^l)_{il}\,\mathfrak{u} \qquad (b_i^l \text{ aus } \mathfrak{B}).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{v} \times \mathfrak{u})\,a = \mathfrak{v} \times (\mathfrak{u}a) &= \mathfrak{v} \times (b_i^l)_{il}\,\mathfrak{u} \\ &= (\mathfrak{v}b_i^l)_{il}\,\mathfrak{u} = (\mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(b_i^l)\,\mathfrak{v})_{il}\,\mathfrak{u} \\ &= (\mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(b_i^l))_{il}\,(\mathfrak{v} \times \mathfrak{u}). \end{aligned}$$

Somit gilt der

Satz 2. 1. *Die reguläre Darstellungsmatrix für $\mathfrak{A}/\Omega$ eines Elements a aus $\mathfrak{A}$ ist gleich der regulären Darstellungsmatrix für $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ des Elements a, in der die Matrixelemente durch ihre regulären Darstellungsmatrizen für $\mathfrak{B}/\Omega$ ersetzt werden.*

Hieraus folgt die *Spurschachtelungsformel*

$$S_{\mathfrak{A}/\Omega}(a) = S_{\mathfrak{B}/\Omega}(S_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(a)). \tag{2. 1}$$

4. Die reguläre Diskriminantenmatrix von $\mathfrak{A}/\Omega$ bezüglich der Basis $v_\varrho u_i$ lautet

$$\Gamma_{\mathfrak{A}/\Omega} = ((S_{\mathfrak{A}/\Omega}(v_\varrho u_i v_\sigma u_k))_{\varrho\sigma})_{ik} = ((S_{\mathfrak{B}/\Omega}(v_\varrho S_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(u_i u_k)\, v_\sigma))_{\varrho\sigma})_{ik}.$$

Nun ist mit $S_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(u_i u_k) = g_{ik}$ und $\mathfrak{v}' = (v_1, \ldots, v_\nu)$

$$(v_\varrho S_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(u_i u_k)\, v_\sigma)_{\varrho\sigma} = (v_\varrho g_{ik} v_\sigma)_{\varrho\sigma} = (\mathfrak{v}\, g_{ik})\,\mathfrak{v}' = \mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(g_{ik})\,\mathfrak{v}\mathfrak{v}'.$$

Hieraus folgt durch Spurbildung

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathfrak{A}/\Omega} &= (\mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(g_{ik})\,\Gamma_{\mathfrak{B}/\Omega})_{ik} \\ &= \begin{pmatrix} \mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(g_{11})\,\Gamma_{\mathfrak{B}/\Omega} & \cdots & \mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(g_{1n})\,\Gamma_{\mathfrak{B}/\Omega} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(g_{n1})\,\Gamma_{\mathfrak{B}/\Omega} & \cdots & \mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(g_{nn})\,\Gamma_{\mathfrak{B}/\Omega} \end{pmatrix} \\ &= (\mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(g_{ik}))_{ik}\,(\Gamma_{\mathfrak{B}/\Omega} \times \mathsf{E}_n). \end{aligned}$$

Hierbei ist $\Gamma_{\mathfrak{B}/\Omega}$ die reguläre Diskriminantenmatrix von $\mathfrak{B}/\Omega$ bezüglich der Basis v_ϱ und E_n die n-reihige Einheitsmatrix. — Somit gilt der

Satz 2. 2. *Die reguläre Diskriminantenmatrix von $\mathfrak{A}/\Omega$ bezüglich der Basis $v_\varrho u_i$ ist gleich der regulären Diskriminantenmatrix von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ bezüglich der Basis u_i, bei der die*

Matrixelemente durch ihre regulären Darstellungsmatrizen von $\mathfrak{B}/\Omega$ ersetzt sind, multipliziert mit der Matrix, die die reguläre Diskriminantenmatrix von $\mathfrak{B}/\Omega$ bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$, n-mal in der Hauptdiagonale enthält.

5. Aus diesem Satz folgt unmittelbar der

Satz 2. 3. *Eine Algebra $\mathfrak{A}/\Omega$ ist genau dann regulär-separabel, wenn für eine Teilalgebra $\mathfrak{B}$ sowohl $\mathfrak{B}/\Omega$ als auch $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ regulär-separabel sind.*

6. Ist speziell $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \tilde{\mathfrak{B}}$, so folgt für b aus $\mathfrak{B}$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_{\mathfrak{A}/\tilde{\mathfrak{B}}}(b) &= \mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(b), \\ S_{\mathfrak{A}/\tilde{\mathfrak{B}}}(b) &= S_{\mathfrak{B}/\Omega}(b), \\ \Gamma_{\mathfrak{A}/\tilde{\mathfrak{B}}} &= \Gamma_{\mathfrak{B}/\Omega}. \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für $\tilde{b}$ aus $\tilde{\mathfrak{B}}$. Weiter gilt für $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \tilde{\mathfrak{B}}$, b aus $\mathfrak{B}$, $\tilde{b}$ aus $\tilde{\mathfrak{B}}$ (MacDuffee [4], 430)

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_{\mathfrak{A}/\Omega}(b\tilde{b}) &= \mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(b) \times \mathsf{M}_{\tilde{\mathfrak{B}}/\Omega}(\tilde{b}), \\ S_{\mathfrak{A}/\Omega}(b\tilde{b}) &= S_{\mathfrak{B}/\Omega}(b)\, S_{\tilde{\mathfrak{B}}/\Omega}(\tilde{b}), \\ \Gamma_{\mathfrak{A}/\Omega} &= \Gamma_{\mathfrak{B}/\Omega} \times \Gamma_{\tilde{\mathfrak{B}}/\Omega}. \end{aligned}$$

§ 3. Der Satz vom primitiven Element.

1. Gegeben sei ein explizit bekannter Körper Ω. Über Ω sei eine regulär-separable Algebra $\mathfrak{B}$ vom Range ν mit Einselement erklärt, die von einem Element b erzeugt wird:

$$\mathfrak{B} = \Omega[\eta] \bmod \varphi(\eta), \quad b = \eta \bmod \varphi(\eta).$$

Dabei ist $\varphi(\eta)$ normiert und mit seiner Ableitung teilerfremd (Satz 1. 1).

Sei weiter über $\mathfrak{B}$ eine Algebra $\mathfrak{A}$ vom Range n mit Einselement erklärt, die ebenfalls von einem Element a erzeugt wird:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}[\eta] \bmod f(\eta), \quad a = \eta \bmod f(\eta).$$

Dabei ist $f(\eta) = f(\eta, b)$ als Polynom in η normiert ($f(\eta)$ aus $\mathfrak{B}[\eta]$, $f(\eta, \xi)$ aus $\Omega[\eta, \xi]$).

Gesucht ist ein Element c, das die Algebra $\mathfrak{A}/\Omega$ erzeugt. Zur Konstruktion wird Ω durch Adjunktion einer Unbestimmten τ zum rationalen Funktionenkörper $\Omega(\tau)$ erweitert. Es gilt dann der

Satz 3. 1. *Das Element $c = a + \tau b$ erzeugt die Algebra $\mathfrak{A}_{\Omega(\tau)}/\Omega(\tau)$.*

2. Bevor wir in den eigentlichen Beweis dieses Satzes eintreten, stellen wir einige Tatsachen über Resultanten zusammen.

Die *Resultantenmatrix* $R(A, B)$ der beiden Polynome

$$A(\zeta) = a_n \zeta^n + \cdots + a_0 \text{ und } B(\zeta) = b_m \zeta^m + \cdots + b_0$$

aus $\mathfrak{B}[\zeta]$ lautet

$$R(A, B) = \begin{pmatrix} a_n & & \cdots & & a_0 & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & a_n & & \cdots & & a_0 \\ & & & b_m & & \cdots & b_0 \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ b_m & \cdots & b_0 & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}.$$

Unter der *ersten Subresultantenmatrix* $R_1(A, B)$ der beiden Polynome versteht man die $(n+m-2)$-reihige quadratische Matrix, die aus $R(A, B)$ durch Streichen der ersten und letzten Zeile und Spalte entsteht. Die Determinanten von $R(A, B)$ bzw. $R_1(A, B)$ heißen die *Resultante* bzw. die *erste Subresultante* der Polynome $A(\zeta)$ und $B(\zeta)$. Es gilt dann:

1) Besitzen die beiden Polynome $A(\zeta)$ und $B(\zeta)$ aus $\mathfrak{B}[\zeta]$ einen gemeinsamen normierten Teiler $\zeta - b$ (d. h. eine gemeinsame Nullstelle b) und ist $R_1(A, B)$ regulär, so gibt es Polynome $K(\zeta)$ und $L(\zeta)$ aus $\mathfrak{B}[\zeta]$ derart, daß $K(\zeta)\,A(\zeta) + L(\zeta)\,B(\zeta) = \zeta - b$ gilt. Die Nullstelle b liegt also ebenfalls in $\mathfrak{B}$.

2) Mit $A(\zeta) = (\zeta - b)\,A^*(\zeta)$, $B(\zeta) = (\zeta - b)\,B^*(\zeta)$ gilt $R_1(A, B) = R(A^*, B^*)$.

3) Gibt es zu den beiden normierten Polynomen $A(\zeta)$, $B(\zeta)$ zwei weitere Polynome $K(\zeta)$, $L(\zeta)$, die die Gleichung $K(\zeta)\,A(\zeta) + L(\zeta)\,B(\zeta) = 1$ erfüllen, so ist die Resultantenmatrix $R(A, B)$ regulär.

Die Übertragung dieser in den Lehrbüchern für Polynome $A(\zeta)$ über Körpern bewiesenen Sätze auf Polynome über kommutative Algebren mit Einselement ist leicht durchgeführt, da die Sätze für Polynome $A(\zeta)$ mit unbestimmten Koeffizienten ausgesprochen werden können. Ein direkter Beweis für Polynome über kommutativen Algebren mit Einselement ist möglich (durch elementares Determinantenumformen), doch wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

3. Zum Beweise von Satz 3. 1 wird gezeigt, daß b und a in der durch c über $\Omega(\tau)$ erzeugten Algebra $\mathfrak{C}$ (die aus allen Linearkombinationen von $e, c, \ldots, c^{n\nu-1}$ mit Koeffizienten aus $\Omega(\tau)$ besteht) liegen.

Es ist nun b Nullstelle der beiden Polynome

$$f(c - \tau\zeta, \zeta) \text{ und } \varphi(\zeta)$$

aus $\mathfrak{C}[\zeta]$. Ist die erste Subresultantenmatrix dieser beiden Polynome regulär, so liegt nach 1) das Element b und damit auch a in $\mathfrak{C}$ und der Satz 3. 1 ist bewiesen.

Die Regularität der Subresultante $|R_1(f(c - \tau\zeta, \zeta), \varphi(\zeta))|$ wird dadurch gezeigt, daß die Regularität des höchsten Koeffizienten $|R_\tau|$ dieser Determinante als Polynom in τ vom Grade $n(\nu - 1)$ nachgewiesen wird. Wegen

$$\begin{aligned} f(c - \tau\zeta, \zeta) &= (c - \tau\zeta)^n + \cdots = (a + \tau(b - \zeta))^n + \cdots \\ &= \tau^n (b - \zeta)^n + \cdots \end{aligned}$$

ist

$$|R_\tau| = |R_1((b - \zeta)^n, \varphi(\zeta))|,$$

und zwar auch dann noch, wenn der Grad von $f(c - \tau\zeta, \zeta)$ als Polynom in ζ größer als n ist, weil das Polynom $\varphi(\zeta)$ normiert ist. Dies ist leicht zu sehen. Mit $\varphi(\zeta) = (\zeta - b)\,\varphi^*(\zeta)$ ist dann (nach 2)) $|R_\tau| = |R(-(b - \zeta)^{n-1}, \varphi^*(\zeta))|$. Da weiter $\varphi(\zeta)$ mit $\varphi'(\zeta)$ teilerfremd ist, gibt es Polynome $K(\zeta), L(\zeta)$ mit $K(\zeta)\,\varphi(\zeta) + L(\zeta)\,\varphi'(\zeta) = 1$ und somit auch Polynome $K_1(\zeta), L_1(\zeta)$ mit $K_1(\zeta)\,(-(b - \zeta)^{n-1}) + L_1(\zeta)\,\varphi^*(\zeta) = 1$. Hieraus folgt wegen 3) die Regularität von $|R_\tau|$. Damit ist Satz 3. 1 bewiesen.

Der Euklidische Algorithmus kann hier bei der Darstellung von $\zeta - b$ als Linearkombination von $f(c - \tau\zeta, \zeta)$ und $\varphi(\zeta)$ nicht angewandt werden, da die Division mit Rest versagt, sobald der Divisor nicht normierbar ist.

4. Wir bestimmen jetzt das Polynom vom Grade $n\nu$ aus $\Omega(\tau)[\zeta]$, das c als Nullstelle hat.

Das in $\mathfrak{B}_{\Omega(\tau)}[\zeta]$ gelegene Polynom $f(\zeta - \tau b, b)$ hat jedenfalls c als Nullstelle. Von diesem Polynom (als Element von $\mathfrak{B}_{\Omega(\tau,\zeta)}$) wird das in $\Omega[\tau, \zeta, \xi]$ gelegene charakteristische Polynom bezüglich $\Omega(\tau, \zeta)$ gebildet:

$$| \xi \mathsf{E} - \mathsf{M}_{\mathfrak{B}/\Omega}(f(\zeta - \tau b, b)) | = \xi^{\nu} - \cdots + (-1)^{\nu} N_{\mathfrak{B}/\Omega}(f(\zeta - \tau b, b)).$$

Da bekanntlich das charakteristische Polynom eines Elements a einer Algebra eben dieses Element als Nullstelle hat, gilt mit $F(\zeta) = N_{\mathfrak{B}/\Omega}(f(\zeta - \tau b, b))$ die Relation

$$f(\zeta - \tau b, b) \mid F(\zeta).$$

Hieraus folgt unmittelbar der

Satz 3. 2. *Das Element $c = a + \tau b$ ist Nullstelle des Polynoms*

$$F(\zeta) = F(\zeta, \tau) = N_{\mathfrak{B}/\Omega}(f(\zeta - \tau b, b))$$

vom Grade $n\nu$ in ζ über $\Omega(\tau)$. Dabei ist $N_{\mathfrak{B}/\Omega}(f(\zeta - \tau b, b))$ die reguläre Norm des Polynoms $f(\zeta - \tau b, b)$ bezüglich $\mathfrak{B}/\Omega$.

5. Der Übergang von der Basis $1, \ldots, b^{\nu-1}a^{n-1}$ zur Basis $1, \ldots, c^{n\nu-1}$ wird durch eine Matrix $\mathsf{A}(\tau)$ vermittelt. Besitzt Ω mehr Elemente als der Grad von $| \mathsf{A}(\tau) |$ als Polynom in τ beträgt, so gibt es sicher ein Element δ aus Ω derart, daß $\mathsf{A}(\delta)$ regulär ist. Somit gilt der

Satz 3. 3. *Besitzt Ω unendlich viele Elemente, so besitzt $\mathfrak{A}/\Omega$ ein primitives Element der Form*

$$d = a + \delta b$$

mit δ aus Ω.

Sind von Ω nur endlich viele Elemente bekannt, so besitzt $\mathfrak{A}/\Omega$ nicht stets ein primitives Element. Man setze nur, falls Ω gerade q Elemente besitzt, $\varphi(\eta) = f(\eta) = \eta^q - \eta$ (mündliche Bemerkung von M. Kneser). Sind jedoch $\varphi(\eta)$ und $f(\eta)$ über Ω bzw. $\mathfrak{B}$ irreduzibel, ist also $\mathfrak{A}$ ein Körper, so besitzt $\mathfrak{A}/\Omega$ auch dann ein primitives Element, wenn von Ω nur endlich viele Elemente bekannt sind. Dies ist leicht zu sehen.

Literatur.

[1] *O. Endler*, Konstruktion von allgemeinen Normalkörpern in beschränkt vielen Schritten. Hausdorff-Gedächtnis-Preisarbeit der Math.-Nat.-Fakultät Bonn 1952.

[2] *A. Hollkott*, Finite Konstruktion geordneter algebraischer Erweiterungen von geordneten Grundkörpern. Dissertation Hamburg 1941.

[3] *M. Kneser*, Bemerkung über die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten. Math. Zeitschr. **57** (1953), 238—240.

[4] *C. C. MacDuffee*, The discriminant-matrix of a semisimple algebra. Transact. Americ. Math. Soc. **33** (1931), 425—432.

[5] *G. Mitas*, Über Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten. Dieses Journal **197** (1956), 76—81.

[6] *G. Mitas*, Zur Strukturtheorie separabler Algebren. Dieses Journal **197** (1956), Heft 3/4.

[7] *B. v. d. Waerden*, Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen. Math. Ann. **102** (1930), 738—739.

Eingegangen 27. Juli 1955.

Über Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten.

Von *Günter Mitas* in Hamburg.

1. In einer kürzlich erschienenen Note hat M. Kneser [1] gezeigt, daß es nicht stets möglich ist, ein Verfahren, Polynome über einem Körper Ω in endlich vielen Schritten in Primpolynome zu zerlegen, auf einen einfachen Erweiterungskörper $\mathsf{K} = \Omega(a)$ fortzusetzen. Genauer: Eine solche Fortsetzung ist (nach Kronecker [2]) stets möglich, wenn a über Ω transzendent oder separabel-algebraisch, jedoch nicht stets (nach Kneser), wenn a inseparabel ist.

Hier wird die Fortsetzbarkeit von Verfahren der Primpolynomzerlegung nicht nur im Hinblick auf die verschiedenen möglichen einfachen Erweiterungskörper K/Ω untersucht, sondern auch im Hinblick auf die Art der zu zerlegenden Polynome. Nach Steinitz (siehe auch Satz 1) läßt sich nämlich ein Polynom $f(\zeta)$ durch Bilden der Ableitung $f'(\zeta)$ und ggT-Bildung schon weitgehend in Faktoren zerlegen, so daß nur noch zwei spezielle Arten von Polynomen in Primpolynome zu zerlegen sind: die mit ihrer Ableitung teilerfremden Polynome und, bei Charakteristik p, die Polynome der Art $\zeta^p - \gamma$. Es ist daher sinnvoll, die Fortsetzbarkeit von Verfahren zu untersuchen, die jeweils eine der beiden speziellen Arten von Polynomen in Primpolynome zu zerlegen gestatten. Dabei zeigt es sich, daß es durchaus Körper gibt, über denen sich nur die mit ihrer Ableitung teilerfremden Polynome oder nur Polynome der Art $\zeta^p - \gamma$ stets in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen lassen.

2. Gegeben sei ein explizit bekannter Körper Ω. Eine Erklärung dieses Begriffes befindet sich in [4], § 1, **1**.

In Erweiterung einer bekannten Tatsache beweisen wir zunächst einen

Hilfssatz. *Ein Polynom $f(\zeta)$ von der Form*

$$f(\zeta) = g(\zeta^p) = \zeta^{np} + \alpha_{n-1}\zeta^{(n-1)p} + \cdots + \alpha_0$$

über einem Körper Ω mit der Charakteristik p ist genau dann über Ω irreduzibel, wenn

1. $g(\xi)$ irreduzibel,

2. wenigstens einer der Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ keine p-te Potenz eines Elements aus Ω ist.

Beweis. Daß die Bedingungen notwendig sind, ist klar.

Die Bedingungen reichen aber auch hin. Sei $d(\zeta)$ ein normierter inkonstanter Teiler von $f(\zeta) = g(\zeta^p)$. Dann folgt aus $d(\zeta)^p \mid g(\zeta^p)^p$ mit $d(\zeta)^p = \hat{d}(\zeta^p)$, $\zeta^p = \xi$ die Relation $\hat{d}(\xi) \mid g(\xi)^p$. Wegen Bedingung 1 muß dann $\hat{d}(\xi) = g(\xi)^s$ mit $1 \leqq s \leqq p$ sein, d. h. es ist $d(\zeta)^p = f(\zeta)^s$ $(1 \leqq s \leqq p)$. Wegen Bedingung 2 folgt hieraus $s = p$, d. h. $d(\zeta) = f(\zeta)$.

Ein Spezialfall dieses Hilfssatzes ist die bekannte Tatsache, daß das Polynom $\zeta^p - \gamma$ genau dann über Ω reduzibel ist, wenn es ein Element γ_0 in Ω mit $\gamma_0^p = \gamma$ gibt

Mit diesem Hilfssatz läßt sich die Zerlegung eines beliebigen Polynoms $f(\zeta)$ in Primfaktoren auf die Zerlegung der obengenannten beiden speziellen Arten von Polynomen zurückführen (Steinitz [6], 216 bzw. 48).

Satz 1. *Läßt sich über dem Körper Ω jedes mit seiner Ableitung teilerfremde Polynom $g(\zeta)$ und bei Charakteristik p jedes Polynom der Art $\zeta^p - \gamma$ in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen, so auch jedes Polynom $f(\zeta)$ über Ω überhaupt.*

Beweis. Sei $f(\zeta)$ das zu zerlegende normierte Polynom vom Grade n.

Ist $(f(\zeta), f'(\zeta)) = 1$, so läßt sich $f(\zeta)$ nach der ersten Voraussetzung in Primpolynome zerlegen.

Ist $(f(\zeta), f'(\zeta)) = d(\zeta)$ ein inkonstantes Polynom, dessen Grad kleiner als n ist, so ist eine Zerlegung von $f(\zeta)$ in zwei Faktoren gegeben, deren Grade kleiner als n sind. Mit diesen Polynomen wird weitergearbeitet.

Ist $f'(\zeta) = 0$, so gilt (bei Charakteristik p) $f(\zeta) = g(\zeta^p)$. Nach dem Hilfssatz kann mit dem Polynom $g(\xi)$, dessen Grad kleiner als n ist, weitergearbeitet werden. Hier geht die zweite Voraussetzung ein.

3. Wir kommen jetzt zum Hauptproblem dieser Note, nämlich zu untersuchen, inwieweit sich Verfahren der Primpolynomzerlegung von einem Körper Ω auf einen einfachen Erweiterungskörper $\mathsf{K} = \Omega(a)$ fortsetzen lassen. Dabei ist a transzendent über Ω, separabel-algebraisch über Ω, oder (bei Charakteristik p) eine p-te Wurzel eines Elements aus Ω.

Das erweiterte Problem, zu untersuchen, inwieweit sich solche Verfahren von einem Körper Ω auf einen Körper K, der aus Ω durch Adjunktion von endlich vielen Elementen entsteht, fortsetzen lassen, ist damit auch behandelt. Denn ein derartiger Erweiterungskörper wird erzeugt durch sukzessive Adjunktion von Unbestimmten, separabel-algebraischen Elementen und (bei Charakteristik p) p-ten Wurzeln.

Das Hauptproblem wird jetzt untersucht für Verfahren, die mit ihrer Ableitung teilerfremde Polynome, und für Verfahren, die (bei Charakteristik p) Polynome der Art $\zeta^p - \gamma$ in endlich vielen Schritten in Primpolynome zu zerlegen gestatten. Das Hauptproblem wird somit nach der Art der Verfahren zweifach, nach der Art des Erweiterungskörpers dreifach, im ganzen also sechsfach aufgespalten. Es wird durch nachstehende Sätze und das Gegenbeispiel von M. Kneser gelöst.

Satz 2. *Läßt sich über dem Körper Ω jedes mit seiner Ableitung teilerfremde Polynom in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen, so auch*

a) *über jedem rationalen Funktionenkörper* $\mathsf{K} = \Omega(\tau)$,

b) *über jedem separablen Erweiterungskörper* $\mathsf{K} = \Omega(b)$,

c) *bei Charakteristik p über jedem rein inseparablen Erweiterungskörper* $\mathsf{K} = \Omega\left(\sqrt[p]{\beta}\right)$.

Satz 3. *Läßt sich über dem Körper Ω mit der Charakteristik p jedes Polynom der Art $\zeta^p - \gamma$ in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen, so auch*

a) *über jedem rationalen Funktionenkörper* $\mathsf{K} = \Omega(\tau)$,

b) *über jedem separablen Erweiterungskörper* $\mathsf{K} = \Omega(b)$,

c) *über jedem rein inseparablen Erweiterungskörper* $\mathsf{K} = \Omega\left(\sqrt[p]{\beta}\right)$, *falls Ω den Unvollkommenheitsgrad 1 besitzt.*

Satz 4 (Gegenbeispiel von M. Kneser). *Es gibt einen Körper Ω_0 mit der Charakteristik p vom Unvollkommenheitsgrad 2 mit folgenden beiden Eigenschaften:*

1. *Über Ω_0 läßt sich jedes Polynom in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen.*

2. *Es gibt einen Erweiterungskörper* $\mathsf{K}_0 = \Omega_0\left(\sqrt[p]{\beta_0}\right)$ *(β_0 aus Ω_0), über dem es ein Polynom $f_0(\zeta) = \zeta^p - a_0$ (a_0 aus K_0) gibt, das sich nicht in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen läßt*[1]).

Dabei hat ein Körper mit der Charakteristik p den Unvollkommenheitsgrad r, wenn durch Adjunktion von r p-ten Wurzeln von Elementen aus Ω,

$$\mathsf{K} = \Omega\left(\sqrt[p]{\beta_1}, \ldots, \sqrt[p]{\beta_r}\right)$$

(r minimal), erreicht werden kann, daß jedes Element aus Ω eine p-te Wurzel in K besitzt.

Beweis von Satz 2a. Sei

$$f(\zeta) = f(\zeta, \tau) = \zeta^n + \alpha_{n-1}(\tau)\,\zeta^{n-1} + \cdots + \alpha_0(\tau) = F(\zeta, \tau)\,h(\tau)^{-1}$$

das über $\Omega(\tau)$ zu zerlegende, mit seiner Ableitung teilerfremde Polynom. Dabei sind $\alpha_0(\tau), \ldots, \alpha_{n-1}(\tau)$ rationale Funktionen in τ, die den Hauptnenner $h(\tau)$ vom Grade b haben; ferner hat $F(\zeta, \tau)$ als Polynom in τ den Grad a. Es gibt dann Polynome $k(\zeta, \tau)$, $l(\zeta, \tau)$ (rationale Funktionen in τ), für die

$$k(\zeta, \tau)\,f(\zeta, \tau) + l(\zeta, \tau)\,\frac{\partial}{\partial \zeta}\,f(\zeta, \tau) = 1$$

gilt.

Zunächst habe Ω unendlich viele Elemente. Mit $a + b + 1$ verschiedenen Stellen $\lambda_0, \ldots, \lambda_{a+b}$ aus Ω, für die

$$f(\zeta, \lambda_i) \neq \infty,\ k(\zeta, \lambda_i) \neq \infty,\ l(\zeta, \lambda_i) \neq \infty\ (i = 0, \ldots, a + b)$$

gilt, werden dann die mit ihren Ableitungen teilerfremden Polynome

$$f(\zeta, \lambda_0), \ldots, f(\zeta, \lambda_{a+b})$$

gebildet, die sich voraussetzungsgemäß über Ω in Primpolynome zerlegen lassen. Wir bilden dann aus den Primfaktoren dieser Primpolynomzerlegungen für jedes $c = 1, \ldots, n - 1$ jede mögliche $(a + b + 1)$-gliedrige Folge von normierten Polynomen vom Grade c, nämlich $g_0(\zeta), \ldots, g_{a+b}(\zeta)$, für die $g_i(\zeta) \mid f(\zeta, \lambda_i)$ $(i = 0, \ldots, a + b)$ gilt. Aus jeder dieser Folgen läßt sich ein möglicher Teiler $g(\zeta, \tau)$ von $f(\zeta, \tau)$ wie folgt konstruieren: Zu der Folge $h(\lambda_0)\,g_0(\zeta), \ldots, h(\lambda_{a+b})\,g_{a+b}(\zeta)$ gibt es nach der Lagrangeschen Interpolationsformel ein eindeutig bestimmtes Polynom $G(\zeta, \tau)$ in ζ und τ, dessen Grad in τ höchstens $a + b$ beträgt und für das $G(\zeta, \lambda_i) = h(\lambda_i)\,g_i(\zeta)$ $(i = 0, \ldots, a + b)$ gilt. Das normierte Polynom $g(\zeta, \tau) = G(\zeta, \tau)\,h(\tau)^{-1}$ (rationale Funktion in τ) ist dann ein möglicher Teiler von $f(\zeta, \tau)$. Umgekehrt bedingt jeder normierte Teiler $g(\zeta, \tau)$ von $f(\zeta, \tau)$ eine Folge $g_0(\zeta) = g(\zeta, \lambda_0), \ldots, g_{a+b}(\zeta) = g(\zeta, \lambda_{a+b})$ der obigen Art.

Sind von Ω nur endlich viele Elemente bekannt, so wird das übliche Kroneckersche Verfahren angewandt ($\tau = \zeta^m$ gesetzt, wo $m > n$, $m > a$ ist). Muß dabei entschieden werden, ob ein Element α aus Ω (Charakteristik p) p-te Potenz eines Elements α_0 aus Ω ist, so bilde man die Folge der Potenzen $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$. Man hat dann entweder genügend viele verschiedene Elemente aus Ω, um das hier dargestellte Verfahren anwenden zu können, oder (bei Abbruch der Folge) man kann ein Element α_0 mit $\alpha_0^p = \alpha$ konstruieren.

---

[1]) Wenigstes so lange nicht, wie es kein Verfahren gibt, jedes zahlentheoretische Problem in endlich vielen Schritten zu lösen.

Beweis von Satz 2b. Sei $f(\zeta) = f(\zeta, b)$ das mit seiner Ableitung teilerfremde, über $\mathsf{K} = \Omega(b)$ in Primpolynome zu zerlegende Polynom.

Wir erweitern Ω durch Adjunktion einer Unbestimmten τ zu $\Omega(\tau)$ und bilden die Algebra $\mathfrak{A} = \mathsf{K}(\tau)[\eta]$ mod $f(\eta)$. Das Element $(\eta + \tau b)$ mod $f(\eta)$ ist dann erzeugendes Element von $\mathfrak{A}/\Omega(\tau)$. Dies ist nach dem Satz vom primitiven Element klar, falls $\mathfrak{A}$ ein Körper ist; einen Beweis für Algebren findet man in [4], § 3, **1**. Das Element $(\eta + \tau b)$ mod $f(\eta)$ ist dann Nullstelle des Polynoms

$$(1) \qquad F(\zeta) = F(\zeta, \tau) = N_{\mathsf{K}/\Omega}\,(f(\zeta - \tau b, b)$$

über $\Omega(\tau)$ (Beweis in [4], § 3, **4**). Die Norm ist dabei als die Determinante der regulären Darstellung erklärt.

Nun ist die Algebra $\mathfrak{A}/\mathsf{K}(\tau)$ regulär-separabel[2]), weil $f(\eta)$ mit seiner Ableitung teilerfremd ist ([4], § 1, **2**). Da $\mathsf{K}(\tau)/\Omega(\tau)$ ebenfalls regulär-separabel ist, ist auch $\mathfrak{A}/\Omega(\tau)$ regulär-separabel ([4], § 2, **5**) und somit $F(\zeta)$ mit seiner Ableitung teilerfremd ([4], § 1, **2**).

Durch Benutzung von [4] wird folgendes erreicht: Es wird nicht nur ein Verfahren angegeben, mit ihrer Ableitung teilerfremde Polynome aus $\mathsf{K}[\zeta]$ über K in endlich vielen Schritten in Primpolynome zu zerlegen, sondern auch der Beweis, daß dieses Verfahren zum Ziele führt, wird in endlich vielen Schritten geführt.

Da $F(\zeta)$ mit seiner Ableitung teilerfremd ist, läßt sich voraussetzungsgemäß (unter Benutzung von Satz 2a) das Polynom $F(\zeta)$ über $\Omega(\tau)$ in Primpolynome zerlegen:

$$(2) \qquad F(\zeta) = F_1(\zeta) \cdots F_r(\zeta).$$

Mit den Polynomen

$$(3) \qquad f_i(\zeta) = (f(\zeta - \tau b), F_i(\zeta)) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

gelten dann die beiden Relationen

$$(4) \qquad f(\zeta - \tau b) = f_1(\zeta) \cdots f_r(\zeta)$$

und

$$(5) \qquad F_i(\zeta) = N_{\mathsf{K}/\Omega}\,(f_i(\zeta)) \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Beweis von (4). Da $F(\zeta)$ mit seiner Ableitung teilerfremd ist, sind die Polynome $f_i(\zeta)$ $(i = 1, \ldots, r)$ als Teiler von $F(\zeta)$ paarweise teilerfremd. Daher folgt aus $f_i(\zeta) \mid f(\zeta - \tau b)$ die Relation $f_1(\zeta) \cdots f_r(\zeta) \mid f(\zeta - \tau b)$. Anderseits folgt aus den mit gewissen Polynomen $a_i(\zeta)$, $b_i(\zeta)$ bestehenden Gleichungen $a_i(\zeta)\, f(\zeta - \tau b) + b_i(\zeta)\, F_i(\zeta) = f_i(\zeta)$ $(i = 1, \ldots, r)$ durch Multiplikation unter Benützung von $f(\zeta - \tau b) \mid F(\zeta)$ (siehe dazu [4], § 3, **4**) die Relation $f(\zeta - \tau b) \mid f_1(\zeta) \cdots f_r(\zeta)$.

Beweis von (5). Aus $f_i(\zeta) \mid F_i(\zeta)$, $f_i(\zeta) \mid N_{\mathsf{K}/\Omega}\,(f_i(\zeta))$ und der Irreduzibilität von $F_i(\zeta)$ über $\Omega(\tau)$ folgt $F_i(\zeta) \mid N_{\mathsf{K}/\Omega}\,(f_i(\zeta))$. Hieraus folgt wegen (1), (2) und (4) die Behauptung (5).

Aus (5) folgt aber, daß die Polynome $f_i(\zeta)$ inkonstant und irreduzibel sind; mit

$$(6) \qquad f(\zeta) = f_1(\zeta + \tau b) \cdots f_r(\zeta + \tau b)$$

ist somit die Primpolynomzerlegung von $f(\zeta)$ gewonnen.

---

[2]) Über den Begriff „regulär-separabel" siehe [4], § 1, **1**. Bei kommutativer Algebra $\mathfrak{A}$ fallen die Begriffe „separabel" und „regulär-separabel" zusammen, wie bei Kenntnis des 1. Wedderburnschen Struktursatzes unschwer einzusehen ist. Wird der Begriff „separabel" wie in [5], § 2, **1** definiert, so ist ohne weiteres einzusehen, daß für Algebren, die von einem Element erzeugt werden (um diese handelt es sich hier ja), die Begriffe „separabel" und „regulär-separabel" zusammenfallen.

Läßt sich ein Element δ aus Ω so finden, daß $(\eta + \delta b)$ mod $f(\eta)$ erzeugendes Element von $\mathfrak{A}/\Omega$ wird (das ist immer möglich, wenn Ω unendlich viele Elemente besitzt), so kann statt $F(\zeta, \tau)$ das Polynom $F(\zeta, \delta)$ über Ω in Primpolynome zerlegt werden.

Beweis von Satz 2c. Sei

$$f(\zeta) = \zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \cdots + a_0$$

aus $\mathsf{K}[\zeta]$ das mit seiner Ableitung teilerfremde, über K in Primpolynome zu zerlegende Polynom. Das Polynom

$$F(\zeta) = \zeta^n + a_{n-1}^p\zeta^{n-1} + \cdots + a_0^p \tag{7}$$

aus $\Omega[\zeta]$ ist ebenfalls mit seiner Ableitung teilerfremd und läßt sich somit in Primpolynome aus $\Omega[\zeta]$ zerlegen:

$$F(\zeta) = F_1(\zeta) \cdots F_r(\zeta). \tag{8}$$

Mit den Polynomen

$$f_i(\zeta) = (f(\zeta), F_i(\zeta^p)) \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{9}$$

gelten dann die Relationen

$$f(\zeta) = f_1(\zeta) \cdots f_r(\zeta) \tag{10}$$

und

$$F_i(\zeta^p) = f_i(\zeta)^p \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{11}$$

Diese Formeln werden ähnlich wie die Formeln (4) und (5) bewiesen.

Die Polynome $f_i(\zeta)$ sind somit inkonstant und irreduzibel, und mit (10) ist die Primpolynomzerlegung von $f(\zeta)$ über K gewonnen.

Beweis von Satz 3a. Sei $\zeta^p - r(\tau) = \zeta^p - \dfrac{a(\tau)}{b(\tau)}$ ($a(\tau), b(\tau)$ teilerfremde Polynome aus $\Omega[\tau]$, $b(\tau)$ normiert) aus $\Omega(\tau)[\zeta]$ das über $\Omega(\tau)$ in Primpolynome zu zerlegende Polynom. Dieses Polynom ist genau dann über $\Omega(\tau)$ reduzibel, wenn $r(\tau)$ die p-te Potenz eines Elements aus $\Omega(\tau)$ ist. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $a(\tau)$ und $b(\tau)$ Polynome in τ^p sind und alle Koeffizienten α dieser Polynome p-te Potenzen von Elementen α_0 aus Ω sind. Mit der Zerlegung der Polynome der Form $\zeta^p - \alpha$ aus $\Omega[\zeta]$ ist somit die Primpolynomzerlegung von $\zeta^p - r(\tau)$ gewonnen.

Beweis von Satz 3b. Es gilt zunächst (Steinitz [6])

$$\mathsf{K} = \Omega(b) = \Omega(b^p). \tag{12}$$

Beweis von (12). Ist $\varphi(\eta) = \eta^\nu + \beta_{\nu-1}\eta^{\nu-1} + \cdots + \beta_0$ das irreduzible Polynom aus $\Omega[\eta]$, von dem b eine Nullstelle ist, so ist (12) gezeigt, wenn die Irreduzibilität des Polynoms $\hat{\varphi}(\eta) = \eta^\nu + \beta_{\nu-1}^p\eta^{\nu-1} + \cdots + \beta_0^p$ bewiesen ist. Beweis der Irreduzibilität von $\hat{\varphi}(\eta)$: Ist $\psi(\eta)$ ein inkonstanter normierter Teiler von $\hat{\varphi}(\eta)$, so ist auch $\psi(\eta^p)$ ein Teiler von $\hat{\varphi}(\eta^p) = \varphi(\eta)^p$; wegen der Irreduzibilität von $\varphi(\eta)$ gilt dann $\psi(\eta^p) = \varphi(\eta)^s$ mit $1 \leqq s \leqq p$. Durch Bilden der Ableitung erkennt man wegen $\varphi'(\eta) \neq 0$, daß $s = p$ und mithin $\psi(\eta) = \hat{\varphi}(\eta)$ sein muß.

Sei nun $\zeta^p - c = \zeta^p - (\gamma_0 + \gamma_1 b^p + \cdots + \gamma_{\nu-1} b^{(\nu-1)p})$ aus $\mathsf{K}[\zeta]$ das über K in Primfaktoren zu zerlegende Polynom. Dieses Polynom ist genau dann über K reduzibel, wenn c die p-te Potenz eines Elements aus K ist. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\gamma_0, \ldots, \gamma_{\nu-1}$ p-te Potenzen von Elementen aus Ω sind. Es bleiben somit nur die Polynome $\zeta^p - \gamma_i$ $(i = 0, \ldots, \nu - 1)$ aus $\Omega[\zeta]$ in Primpolynome zu zerlegen.

Beweis von Satz 3c. Sei $\zeta^p - g$ aus $\mathsf{K}[\zeta]$ das über K in Primpolynome zu zerlegende Polynom. Dieses Polynom ist genau dann über K reduzibel, wenn das Polynom $\zeta^p - g^z$ aus $\Omega[\zeta]$ über Ω reduzibel ist.

4. Aus den Sätzen 2 und 3 folgt wegen Satz 1 der bekannte

Satz 5. *Läßt sich über dem Körper Ω jedes Polynom in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen, so auch*

a) *über jedem rationalen Funktionenkörper* $\mathsf{K} = \Omega(\tau)$,

b) *über jedem separablen Erweiterungskörper* $\mathsf{K} = \Omega(b)$.

Die Sätze 2 und 3 lassen sich nicht ohne weiteres aus Satz 5 gewinnen, denn die Voraussetzung „über dem Körper Ω läßt sich jedes mit seiner Ableitung teilerfremde Polynom (bzw. jedes Polynom der Form $\zeta^p - \gamma$) in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen" ist schwächer als die Voraussetzung „über dem Körper Ω läßt sich jedes Polynom in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen".

Der von M. Kneser [1] konstruierte Körper K ist ein Körper, über dem sich zwar jedes mit seiner Ableitung teilerfremde Polynom, nicht aber jedes Polynom der Form $\zeta^p - \gamma$ in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen läßt. Ähnlich wie in der Note von v. d. Waerden [7] läßt sich ein Körper Δ mit der Charakteristik p konstruieren, über dem sich zwar jedes Polynom der Form $\zeta^p - \gamma$, nicht aber jedes mit seiner Ableitung teilerfremde Polynom in endlich vielen Schritten in Primpolynome zerlegen läßt.

W. Krull [3] befaßt sich ebenfalls mit dem Problem der Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten.

Literatur.

[1] *M. Kneser*, Bemerkung über die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten. Math. Zeitschr. **57** (1953), 238—240.

[2] *L. Kronecker*, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Dieses Journ. **92** (1882), 1—122.

[3] *W. Krull*, Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. I., II., III. Math. Zeitschr. **59** (1953), 57—60, 296—298, **60** (1954), 109—111.

[4] *G. Mitas*, Bemerkungen zur Algebrentheorie. Dieses Journ. **197** (1956), 68—75.

[5] *G. Mitas*, Zur Strukturtheorie separabler Algebren. Dieses Journ. **197** (1956), Heft 3/4.

[6] *E. Steinitz*, Algebraische Theorie der Körper. Dieses Journ. **137** (1910), 167—309. Neu herausgegeben von Reinhold Baer und Helmut Hasse. Walter de Gruyter & Co., Berlin-Leipzig 1930.

[7] *B. v. d. Waerden*, Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen. Math. Ann. **102** (1930), 738—739.

Eingegangen 27. Juli 1955.

Über mehrfach vollkommene Zahlen. II.

Von *Hans-Joachim Kanold* in Braunschweig.

Wir schließen uns in dieser Arbeit der Bezeichnungsweise einer früheren an[1]). Danach heißt eine natürliche Zahl $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ eine $(s-1)$-fach vollkommene Zahl, wenn sie der Bedingung $\sigma(n) = s \cdot n$ genügt. Die $p_\varkappa$ bedeuten Primzahlen, $\sigma(n)$ bezeichnet die Summe aller positiven Teiler von n. Ferner gilt die leicht einzusehende Ungleichung

$$2 \leqq s < \prod_{\varkappa=1}^{k} \frac{p_\varkappa}{p_\varkappa - 1} \leqq k + 1.$$

§ 1.

Wir wollen in diesem einleitenden Paragraphen die mehrfach vollkommenen Zahlen mit $k = 2, 3$ und 4 betrachten. Der Fall $k = 2$ führt auf die geraden vollkommenen Zahlen, deren Primzahlpotenzzerlegung man genau kennt. Jede gerade vollkommene Zahl muß die Gestalt $n = 2^{p-1} \cdot p_2$ besitzen, wobei p und $p_2 = 2^p - 1$ Primzahlen bedeuten. Man kennt bisher 17 gerade vollkommene Zahlen[2]). Davon sind 8 kleiner als 10^{20}, nämlich diejenigen mit $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$ und 31.

Es sei jetzt $k = 3$. Weil für eine ungerade vollkommene Zahl bestimmt $k \geqq 6$ sein muß[3]), können wir sogleich auch $s = 3$ annehmen. Dann muß entweder $n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ oder $n = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ sein[4]). Der Fall $k = 4$ läßt die Möglichkeiten $s = 3, 4$ zu. $s = 3$ führt zu $n = 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$ (vgl. Anmerkung [4])). $s = 4$ und $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} < 4$ zeigt, daß $2 \cdot 3 \cdot 5 \mid n$ sein muß. Aus $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{16}{15} = 4$ folgt weiterhin, daß n noch eine der Primzahlen $7, 11, 13$ als Teiler enthalten muß.

Wir müssen jetzt die Gleichung

$$(1) \qquad (2^{\alpha_1+1} - 1)\, \sigma(3^{\alpha_2})\, \sigma(5^{\alpha_3})\, \sigma(p_4^{\alpha_4}) = 4 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4}$$

diskutieren, wobei für p_4 die Möglichkeiten $7, 11, 13$ bestehen. Es enthält $\sigma(p_4^{\alpha_4})$ für $\alpha_4 \geqq 2$ immer einen Primteiler[5]) der Restklasse $1 \pmod{\alpha_4 + 1}$ (vgl. Anmerkung [5])), d. h. einen Primteiler $\geqq \alpha_4 + 2$. Daraus folgt sofort

$$(2) \qquad \alpha_4 \leqq 3.$$

---

[1]) *H. J. Kanold*, Über mehrfach vollkommene Zahlen. Journ. f. reine u. angew. Math. **194** (1955), 218—220.

[2]) *H. S. Uhler*, On the 16th and 17th perfect numbers. Scripta math. **19** (1953), 128—131.

[3]) *U. Kühnel*, Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen. Math. Zeitschr. **52** (1950), 202—211.

[4]) *R. Steuerwald*, Ein Satz über natürliche Zahlen N mit $\sigma(N) = 3N$. Alexander Ostrowski zum 60. Geburtstag gewidmet. Arch. d. Math. **5** (1954), 449—451.

[5]) *H. J. Kanold*, Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme. I. Journ. f. reine u. angew. Math. **187** (1949), 169—182.

$\alpha_4 = 2$ führt wegen $\sigma(7^2) = 3 \cdot 19$; $\sigma(11^2) = 7 \cdot 19$ und $\sigma(13^2) = 3 \cdot 61$ sogleich zu Widersprüchen.

$\alpha_4 = 3$ und $p_4 = 11$, 13 sind unmöglich wegen

$$\sigma(11^3) = 2^3 \cdot 3 \cdot 61 \quad \text{und} \quad \sigma(13^3) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17.$$

Aus $p_4 = 7$ folgt $\sigma(7^3) = 2^4 \cdot 5^2$. Weil 3 und 5 primitive Wurzeln (mod 7) sind, müßte $7^3 \mid 2^{\alpha_1+1} - 1$, also $\alpha_1 > 20$ sein. Dann enthielte[6]) aber n einen Primteiler > 7. Wir müssen also nur noch den Fall

$$\alpha_4 = 1 \tag{3}$$

untersuchen. $p_4 = 13$ führt wegen $1 + 13 = 2 \cdot 7$ sofort zum Widerspruch und $p_4 = 11$ ergibt die folgenden Unmöglichkeiten:

$11 \mid 2^{\alpha_1+1} - 1$ liefert $31 \mid n$; $11 \mid \sigma(3^{\alpha_2})$ liefert $11^2 \mid n$; $11 \mid \sigma(5^{\alpha_3})$ liefert $71 \mid n$. Also bleibt

$$p_4 = 7. \tag{4}$$

Daraus folgt sofort[7])

$$\alpha_\varkappa \leqq 5 \text{ für } \varkappa = 1, 2, 3. \tag{5}$$

$\alpha_3 > 1$ liefert Widersprüche, ebenso $\alpha_2 > 3$. Wir erhalten schließlich für n die einzige Möglichkeit

$$n = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7. \tag{6}$$

§ 2.

Wir wollen in diesem Paragraphen den folgenden Satz beweisen, der ein Analogon zu einem früheren Satz über ungerade vollkommene Zahlen darstellt[8]):

Satz 1. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *eine* $(s-1)$*-fach vollkommene Zahl, ferner sei* $k > 2$ *und die ganze rationale Zahl* t *ein gemeinsamer Teiler von mindestens* $k-1$ *Zahlen* $\alpha_\varkappa + 1$. *Dann ist* $t \mid sn$.

Beweis. Wir müssen zeigen: Ist l Primzahl und $l^j \mid \alpha_\varkappa + 1$ für $\varkappa = 2, \ldots, k$ (die Primzahlen $p_\varkappa$ sind nicht notwendig der Größe nach numeriert), dann ist $l^j \mid sn$. Wie in § 1 gezeigt wurde, sind für $3 \leqq k \leqq 4$ die einzigen mehrfach vollkommenen Zahlen

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5;\ 2^5 \cdot 3 \cdot 7;\ 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31;\ 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7. \tag{1}$$

Wir sehen sofort, daß in diesen Fällen für t nur der Wert 2 in Frage kommt und dann sogar

$$t^3 \mid n \tag{2}$$

erfüllt ist. Von jetzt an wollen wir bei diesem Beweis $k \geqq 5$ voraussetzen. Ist $p_\varkappa \equiv 1 \pmod{l}$ für mindestens ein $\varkappa$ aus $2, \ldots, k$ erfüllt, so gilt

$$l^j \mid \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) \mid sn. \tag{3}$$

Es sei nun

$$p_\varkappa \not\equiv 1 \pmod{l} \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k. \tag{4}$$

---

[6]) A. a. O. [5]).

[7]) A. a. O. [1]).

[8]) *H. J. Kanold*, Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen. Journ. f. reine u. angew. Math. 183 (1941), 98—109, insbesondere III, (1).

Wir wollen zeigen, daß aus dieser Annahme ein Widerspruch folgt. Wegen $k > 2$ folgt auch $l > 2$. Es sei nun

$$(5) \qquad 1 + p_\varkappa + p_\varkappa^2 + \cdots + p_\varkappa^{l-1} = s_\varkappa p_1^{\xi_\varkappa} \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k.$$

Dabei können wir $1 \leqq s_\varkappa \mid s$ und $\xi_\varkappa \geqq 0$ voraussetzen. Die Anzahl der $s_\varkappa > 1$ sei k_s. Wir beachten, daß $s_\varkappa$ nur Primteiler $\equiv 1 \pmod{2l}$ enthalten kann[9]). Daraus folgt

$$(6) \qquad k_s \leqq \frac{\log s}{\log(2l+1)}.$$

Für $k - 1 - k_s$ Zahlen $\varkappa > 1$ gilt nun

$$(7) \qquad 1 + p_\varkappa + p_\varkappa^2 + \cdots + p_\varkappa^{l-1} = p_1^{\xi_\varkappa}.$$

Die Kongruenz $1 + x + x^2 + \cdots + x^{l-1} \equiv 0 \pmod{p_1^{\xi_\varkappa}}$ hat genau $l - 1$ inkongruente Lösungen x. Das sind die Lösungen $p_\varkappa, p_\varkappa^2, \ldots, p_\varkappa^{l-1}$. Numerieren wir jetzt die Primzahlen $p_\varkappa$ so, daß

$$(8) \qquad 1 + p_\varkappa + \cdots + p_\varkappa^{l-1} = p_1^{\xi_\varkappa} \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k - k_s$$

und

$$(9) \qquad p_2 < p_3 < \cdots < p_{k-k}$$

gilt, dann folgt

$$(10) \qquad p_1^{\xi_\varkappa} < p_{\varkappa+1} < p_1^{\xi_\varkappa+1} \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k - k_s - 1.$$

Dabei ist

$$(11) \qquad \xi_\varkappa \geqq (l-1)^{\varkappa-2} \quad (\varkappa = 2, \ldots, k - k_s).$$

Das ergibt mit Berücksichtigung von (6)

$$(12) \qquad \begin{aligned} s &< \prod_{\varkappa=1}^{k} \frac{p_\varkappa}{p_\varkappa - 1} \leqq \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \prod_{\nu=0}^{k-k_s-3} \left(1 + \frac{1}{p_1^{(l-1)^\nu}}\right) \cdot \prod_{\varkappa=k-k_s+1}^{k} \frac{p_\varkappa}{p_\varkappa - 1} \\ &\leqq \frac{p_1 + 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{k_s + 2}{k_s + 1} \cdot \prod_{\nu=1}^{k-k_s-3} \left(1 + \frac{1}{p_1^{(l-1)^\nu}}\right) \\ &< \frac{p_1 + 1}{p_1 - 1}(k_s + 2) \cdot \frac{p_1^{l-1}}{p_1^{l-1} - 1} \leqq \left(\frac{p_1}{p_1 - 1}\right)^2 \left(\frac{\log s}{\log(2l+1)} + 2\right). \end{aligned}$$

Ist $k_s > 1$, so folgt

$$(13) \qquad 49 \leqq (2l+1)^2 \leqq s < 4\left(\frac{\log s}{\log 7} + 2\right) < 2{,}1 \log s + 8.$$

Diese Ungleichung stellt einen Widerspruch dar.

Ist $k_s \leqq 1$, so haben wir

$$(14) \qquad s < \left(\frac{p_1}{p_1 - 1}\right)^2 (k_s + 2) \leqq \left(\frac{p_1}{p_1 - 1}\right)^2 \cdot 3,$$

ferner

$$(15) \qquad k - k_s - 1 \geqq k - 2 \geqq 3.$$

Daraus ergibt sich

$$(16) \qquad 1 + p_2 + \cdots + p_2^{l-1} = p_1^{\xi_3},$$

---

[9]) A. a. O. [5]).

also $p_1 \equiv 1 \pmod{2l}$, $p_1 \geqq 2l + 1 \geqq 7$ und

$$7^{k_s} \leqq (2l+1)^{k_s} \leqq s < \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot 3 < 5. \tag{17}$$

Das liefert aber

$$k_s = 0;\ s < \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot 2 < 3, \text{ d. h. } s = 2. \tag{18}$$

Dann müßte n aber eine *ungerade* vollkommene Zahl sein, also[10]) auch $k \geqq 6$. Ferner wäre dann nach (8)

$$1 + p_\varkappa + \cdots + p_\varkappa^{l-1} = p_1^{\xi_\varkappa} \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k \geqq 6. \tag{19}$$

Nach früheren Ergebnissen[11]) muß

$$l \geqq 5 \tag{20}$$

sein. Das liefert $p_1 \geqq 11$; $s = 2 < \left(\frac{p_1}{p_1 - 1}\right)^2 \frac{p_2}{p_2 - 1} \leqq \left(\frac{11}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}$.

Diese Ungleichung ist aber falsch. Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 3.

Wir wollen jetzt zunächst Satz 1 in dem Sonderfall $t = 2^j$ verschärfen. Daraus wird sich dann auch eine Verschärfung für den Fall $s = 2^\xi$ ergeben (j, ξ sind natürliche Zahlen).

Satz 2. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *eine* $(s-1)$*-fach vollkommene Zahl, ferner sei* $k > 2$ *und* $t = 2^j$ *ein gemeinsamer Teiler von mindestens* $k - 1$ *Zahlen* $\alpha_\varkappa + 1$. *Dann ist* $t^3 \mid n$.

Beweis. Wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, gilt der Satz für $k < 5$. Wir können also wieder

$$k \geqq 5 \tag{1}$$

annehmen. Es sei jetzt

$$2^\xi \mid s;\ 2^{\xi+1} \nmid s \qquad (\xi \geqq 0). \tag{2}$$

In jedem Fall ist dann

$$2^{(k-2)j-\xi} \mid n. \tag{3}$$

Wäre unser Satz falsch, so müßte $(k-2)j - \xi < 3j$, also $(k-5)j < \xi$, d. h.

$$k - 4 \leqq \xi \leqq \frac{\log s}{\log 2} \leqq \frac{\log k}{\log 2} \tag{4}$$

sein. Die Ungleichung (4) stellt für $k > 7$ einen Widerspruch dar. Wir können somit

$$s \leqq k \leqq 7 \tag{5}$$

annehmen. Aus (2) erhalten wir

$$\xi \leqq 2. \tag{6}$$

Dann folgt aus (1) und (4)

$$5 \leqq k \leqq 6;\ 1 \leqq \xi. \tag{7}$$

---

[10]) A. a. O. [3]).

[11]) *H. J. Kanold*, Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme. II. Journ. f. reine u. angew. Math. 188 (1950), 129—146, insbesondere Abschnitt III, (41).

Nach (2) ergibt sich wegen $s < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} < 6$

$$s = 2 \text{ oder } = 4. \tag{8}$$

Der Fall $s = 2$ führt wieder zu einer *ungeraden* vollkommenen Zahl, somit zu $k = 6$. Aus (4) folgt dann $\xi \geqq 2$, was nach (2) aber $s = 2$ widerspricht. Also bleibt nur noch

$$s = 4, \ \xi = 2 \tag{9}$$

zu untersuchen übrig.

Die Abschätzung

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} < 4 \tag{10}$$

zeigt, daß

$$2 \cdot 3 \mid n \tag{11}$$

sein muß. Es sei wieder

$$2^j \mid \alpha_\varkappa + 1 \text{ für } \varkappa = 2, \ldots, k. \tag{12}$$

Wir unterscheiden jetzt die zwei Fälle

$$\begin{cases} \text{I. } p_1 = 2, \text{ d. h. } p_2 = 3;\ 2^{(k-1)j+1-\xi} = 2^{(k-1)j-1} \mid n; \\ \text{II. } p_2 = 2, \text{ d. h. } 2^{2^j-1} \mid n;\ 2^{(k-2)j-2} \mid n. \end{cases} \tag{13}$$

Der Fall I liefert $(k-1)j - 1 < 3j$, also den Widerspruch $k \leqq 4$. Der Fall II liefert $2^j - 1 < 3j$, d. h.

$$2^j + 1 \leqq 3j;\ j \leqq 3. \tag{14}$$

$k = 6$ führt nach (13), II zu $4j - 2 < 3j$, also zu

$$j = 1;\ 2^2 \mid n;\ \alpha_2 \geqq 2. \tag{15}$$

Nach (12) ist dann aber auch $2 \mid \alpha_2 + 1$, also $\alpha_2 \geqq 3$, somit $2^{3j} \mid n$. Wir können deshalb von jetzt an wegen (7)

$$k = 5 \tag{16}$$

annehmen. Aus $j = 3$ ergibt sich

$$2^7 \sigma(2^7) = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \mid n. \tag{17}$$

Weil $\sigma(5^7) = 2^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 313$ ist, muß

$$\sigma(3^7)\, \sigma(17^7) \mid n \tag{18}$$

sein. Das ergibt aber ebenfalls einen Widerspruch zu (16). Wir können nach (14)

$$j = 1 \text{ bzw. } = 2;\ 2^3 \nmid n \text{ bzw. } 2^6 \nmid n, \tag{19}$$

also $\alpha_2 < 3$ bzw. $\alpha_2 < 6$ voraussetzen. Die Abschätzung

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} < 4 \tag{20}$$

zeigt, daß

$$\alpha_2 > 1, \text{ d. h. nach (12) auch } 2^3 \mid n \tag{21}$$

sein muß. Wir können nach (19) also

$$j = 2 \tag{22}$$

und nach (12) auch

$$4 \mid \alpha_2 + 1 \tag{23}$$

annehmen. Dann liefert aber (19)

$$\alpha_2 = 3, \tag{24}$$

während aus (22), (16) und (13), II

$$\alpha_2 \geqq 4 \tag{25}$$

folgt. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Satz 3. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *eine* $(s-1)$*-fach vollkommene Zahl, ferner sei* $k > 2$, $s = 2^\xi$ *und die ganze rationale Zahl* t *ein gemeinsamer Teiler von mindestens* $k-1$ *Zahlen* $\alpha_\varkappa + 1$. *Dann ist* $t^3 \mid n$.

Beweis. Wir müssen nach Satz 2 noch zeigen: Ist die *ungerade* Primzahl l in t in der j-ten Potenz enthalten, so folgt $l^{3j} \mid n$. Nach Satz 1 ist $l^j \mid n$. Wir können also

$$2^\xi l^{\alpha_1} \prod_{\varkappa=2}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} = \sigma(l^{\alpha_1}) \prod_{\varkappa=2}^{k} \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}), \quad \alpha_1 \geqq j, \tag{26}$$

annehmen. Wir unterscheiden jetzt wieder zwei Fälle.

$$\begin{cases} \text{I. } l^j \nmid \alpha_1 + 1, \text{ d. h. } l^j \mid \alpha_\varkappa + 1 \text{ für } 2 \leqq \varkappa \leqq k; \\ \text{II. } l^j \mid \alpha_1 + 1, \text{ d. h. } \alpha_1 \geqq l^j - 1 \geqq 3^j - 1 \geqq 2j;\ l^j \mid \alpha_\varkappa + 1 \text{ für } 3 \leqq \varkappa \leqq k. \end{cases} \tag{27}$$

Wäre unser Satz falsch, so wäre im Fall I

$$p_\varkappa \not\equiv 1 \pmod{l} \text{ für } \varkappa \neq 2, 3 \tag{28}$$

und im Fall II

$$p_\varkappa \not\equiv 1 \pmod{l} \text{ für } \varkappa \neq 2, 3, 4;\ 3j > \alpha_1 \geqq l^j - 1, \text{ d. h. } j = 1, l = 3. \tag{29}$$

Im Fall I erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{l-1} = l \cdot p_3^{b_3} \\ 1 + p_3 + p_3^2 + \cdots + p_3^{l-1} = l \cdot p_2^{b_2} \end{cases} \tag{30}$$

mit natürlichen Exponenten b_2, b_3. Dieses System führt aber nach früheren Ergebnissen[12]) zum Widerspruch.

Im Fall II ergeben (27) und (29)

$$\begin{cases} 3 \mid \alpha_1 + 1;\ \alpha_1 \geqq 2;\ 3 \mid \alpha_\varkappa + 1 \text{ für } 3 \leqq \varkappa \leqq k; \\ p_\varkappa \not\equiv 1 \pmod{3} \text{ für } \varkappa \neq 2, 3, 4;\ 3 > \alpha_1. \end{cases} \tag{31}$$

Wir haben also nach (26) und (31)

$$\alpha_1 = 2;\ \sigma(3^2) = 13 \mid n. \tag{32}$$

Aus (26) folgt nun

$$2^\xi \mid \prod_{\varkappa=2}^{k} \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) \mid 2^\xi \cdot n. \tag{33}$$

Es sei

$$2 \mid \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) \text{ für ein } \varkappa > 2. \tag{34}$$

---

[12]) *H. J. Kanold*, Über ein spezielles System von zwei diophantischen Gleichungen. Journ. f. reine u. angew. Math. **189** (1952), 243—245.

Dann folgt für dieses $\varkappa$ nach (31)

$$(35) \qquad (1 + p_\varkappa)(1 + p_\varkappa + p_\varkappa^2)(1 - p_\varkappa + p_\varkappa^2) \mid \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}).$$

Wäre dieses spezielle $\varkappa > 4$, also nach (31) auch $p_\varkappa \equiv 2 \pmod 3$, so folgte aus (35) sofort $3^2 \mid \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa})$. Dann müßte aber $p_3 \equiv p_4 \equiv 2 \pmod 3$ sein, was zu

$$(36) \qquad \prod_{\varkappa=3}^{k} (1 + p_\varkappa + p_\varkappa^2) \mid p_2^{\alpha_2}$$

führen würde. Wegen $k \geqq 5$ ergibt dies einen Widerspruch[13]). Wäre $\varkappa = 3$ oder $= 4$, also z. B. $\varkappa = 3$, so wäre

$$(37) \qquad 1 + p_3 + p_3^2 = 3p_r^{b_r} \text{ und } 1 - p_3 + p_3^2 = p_s^{b_s}.$$

Dabei sind r, s entweder gleich 2, 4 oder gleich 4, 2; b_r kann nur 1 oder 2 sein, b_s muß eine Potenz von 3 sein[14]).

Wir beachten, daß nach (32) eine der Zahlen p_2, p_3, p_4 gleich 13 sein muß.

a) $p_3 = 13$ ergibt $p_r = 61$, $p_s = 157$.

$r = 4$ liefert mit $\sigma(61^2) = 3 \cdot 13 \cdot 97 \mid n$ einen Widerspruch zu (31).

$s = 4$ liefert mit $\sigma(157^2) = 3 \cdot 8269 \mid n$ ebenfalls einen Widerspruch zu (31).

b) $p_r = 13$ liefert $1 + p_3 + p_3^2 = 3 \cdot 13$ oder $= 3 \cdot 13^2$. Beides führt zum Widerspruch.

c) $p_s = 13$ liefert $1 - p_3 + p_3^2 = 13^{b_s} \equiv -1 \pmod 7$. Daraus folgt $p_3 \equiv 4 \pmod 7$; dann ergibt $1 + p_3 + p_3^2 \equiv 0 \pmod 7$ die Widersprüche $1 + p_3 + p_3^2 = 3 \cdot 7$ oder $= 3 \cdot 7^2$.

Wir haben somit gezeigt, daß (34) nicht gelten kann. Es bleibt noch übrig, die Unmöglichkeit von

$$(38) \qquad 2^\xi \mid \sigma(p_2^{\alpha_2})$$

nachzuweisen. Es ist dann

$$(39) \qquad 2 \mid 1 + p_2 \mid 2n.$$

a) $p_2 = 13$ führt zu $7 \mid n$; $\sigma(7^2) = 3 \cdot 19 \mid n$; $\sigma(19^2) = 3 \cdot 127 \mid n$. Das widerspricht (31).

b) $p_3 = 13$ führt zu $\sigma(13^2) = 3 \cdot 61 \mid n$.

$p_2 = 61$ liefert $31 \mid n$; $\sigma(31^2) = 3 \cdot 331 \mid n$ und damit einen Widerspruch zu (31).

$p_4 = 61$ liefert $\sigma(61^2) = 3 \cdot 13 \cdot 97 \mid n$; $p_2 = 97$. Dann folgt aber aus $p_2 + 1 = 2 \cdot 7^2 \mid n$ ein Widerspruch zu (31). Damit ist Satz 3 bewiesen.

§ 4.

Wir werden in diesem Paragraphen eine frühere numerische Abschätzung über ungerade vollkommene Zahlen verschärfen und auf ungerade mehrfach vollkommene Zahlen ausdehnen[15]). Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 1. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *eine* $(s-1)$*-fach vollkommene Zahl, ferner sei* $sn \equiv 1 \pmod 2$. *Dann ist* $n > 10^{20}$.

---

[13]) A. a. O. [11]).

[14]) *T. Nagell*, Des équations indéterminées $x^2 + x + 1 = y^n$ et $x^2 + x + 1 = 3y^n$. Norsk Matematisk Forenings Skrifter, Serie I, 2, 1—14 (1921).

[15]) *H. J. Kanold*, Folgerungen aus dem Vorkommen einer Gaußschen Primzahl in der Primfaktorenzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl. Journ. f. reine u. angew. Math. 186 (1944), 25—29.

Beweis. Wir gehen aus von der Beziehung

$$sn = s \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} = \prod_{\varkappa=1}^{k} \sigma(p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) \equiv 1 \pmod 2. \tag{1}$$

Daraus sehen wir, daß

$$\alpha_\varkappa \equiv 0 \pmod 2 \text{ für } \varkappa = 1, \ldots, k \tag{2}$$

sein muß. Wir wollen nun zeigen, daß aus (1) und $n < 10^{20}$, d. h. nach (2) auch

$$p_1 p_2 \cdots p_k \leqq \sqrt{n} < 10^{10} \tag{3}$$

ein Widerspruch folgt. Weil

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 > 10^{10} \tag{4}$$

ist, können wir

$$k \leqq 9 \tag{5}$$

annehmen. Es ist dann

$$3 \leqq s < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{28} < 4, \tag{6}$$

also

$$s = 3. \tag{7}$$

Wegen

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} < 3 \tag{8}$$

und (5) erhalten wir

$$8 \leqq k \leqq 9. \tag{9}$$

Wegen (2) folgt aus $5 \mid n$ bzw. $17 \mid n$, daß n mindestens einen Primteiler der Restklasse 1 (mod 10) bzw. (mod 34) mindestens in der 4. bzw. 16. Potenz besitzt[16]). Somit liefert $17 \mid n$ den Widerspruch

$$n > 103^{16} > 10^{32}. \tag{10}$$

$k = 9$ ergibt dann entweder

$$\sqrt{n} > 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 > 10^{10} \tag{11}$$

oder

$$\sqrt{n} > 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 > 10^{10}. \tag{12}$$

Also bleibt noch

$$k = 8. \tag{13}$$

Die Abschätzung

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{28} < 3 \tag{14}$$

zeigt, daß (13) zum Widerspruch führt. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

---

[16]) A. a. O. [15]).

Hilfssatz 2. *Es sei* $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ *eine* $(s-1)$*-fach vollkommene Zahl, ferner sei* $n \equiv 1 \pmod 2$ *und* $s > 2$. *Dann ist* $n > 10^{20}$.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 können wir

$$s \geqq 4 \tag{15}$$

annehmen. Aus der Ungleichung

$$4 \leqq s < \prod_{\varkappa=1}^{k} \frac{p_\varkappa}{p_\varkappa - 1} \leqq \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{p_k}{p_k - 1} \tag{16}$$

folgt

$$k > 20 \text{ und } n > 10^{30}, \tag{17}$$

wie bei früheren Abschätzungen gezeigt wurde[17]).

Satz 4. *Es sei* $n < 10^{20}$ *eine ungerade natürliche Zahl. Dann kann* n *keine vollkommene oder mehrfach vollkommene Zahl sein.*

Beweis. Nach dem vorangehenden Hilfssatz müssen wir noch zeigen, daß es unterhalb von 10^{20} keine ungerade vollkommene Zahl geben kann. Wir bezeichnen die ungerade vollkommene Zahl wie in früheren Arbeiten (vgl. z. B. Anmerkung [8])) und gehen aus von der Gleichung

$$\begin{aligned} n &= p^\alpha \prod_{\varrho=1} q_\varrho^{2\beta_\varrho} \\ &= \frac{p+1}{2}\left(1 + p + p^2 + \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)\left(1 - p + p^2 - \cdots + p^{\frac{\alpha-1}{2}}\right) \prod_{\varrho=1}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}). \end{aligned} \tag{18}$$

Dabei gilt nach Euler die Kongruenz

$$p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4. \tag{19}$$

Ferner ist[18])

$$r \geqq 5. \tag{20}$$

Auf Grund früherer Ergebnisse[19]) können wir weiterhin annehmen

$$\begin{cases} n \neq p^\alpha q_1^{2\beta_1} q_2^2 \cdots q_r^2 \text{ mit } 2\beta_1 < 10; \\ n \neq p q_1^{2\beta_1} q_2^2 \cdots q_r^2;\ n \neq p^\alpha \cdot 3^{2\beta_1} \cdot q_2^2 \cdots q_r^2, \end{cases} \tag{21}$$

außerdem[20])

$$n \neq p^\alpha q_1^4 q_2^4 q_3^2 \cdots q_r^2. \tag{22}$$

Wir erhalten daraus, unter Berücksichtigung, daß n mindestens einen Primteiler $\geqq 61$ enthalten muß[21]), für n die Abschätzung

$$10^{20} > n \geqq p \cdot q_1^6 \cdot q_2^4 q_3^2 \cdots q_r^2 \geqq 61 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdots q_r^2. \tag{23}$$

Aus $r > 7$ ergibt sich somit

$$n \geqq 61 \cdot 3^4 \cdot 5^2 (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23)^2 > 10^{20}. \tag{24}$$

---

[17]) *H. J. Kanold*, Untere Schranken für teilerfremde befreundete Zahlen. Arch. d. Math. **6** (1953), 399—401.

[18]) A. a. O. [3]).

[19]) A. a. O. [11]).

[20]) *H. J. Kanold*, Einige neuere Bedingungen für die Existenz ungerader vollkommener Zahlen, Journ. f. reine u. angew. Math. **192** (1953), 24—34.

[21]) A. a. O. [15]).

Die Bedingungen (20) und (24) ergeben zusammen

$$5 \leqq r \leqq 7. \tag{25}$$

Das führt zu[22])

$$3 \mid n. \tag{26}$$

Wir können nach (19) o. B. d. A.

$$q_1 = 3 \tag{27}$$

setzen. Wegen $(q_\varrho^{2\beta_\varrho}, 1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho}) = 1$ folgt aus (18)

$$n = f_\varrho q_\varrho^{2\beta_\varrho}(1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^{2\beta_\varrho}) \tag{28}$$

mit ganzzahligem $f_\varrho \geqq 1$. Es sei nun

$$11 \mid n \tag{29}$$

angenommen. Wegen (19) und (27) können wir

$$q_2 = 11 \tag{30}$$

setzen. Aus (28) folgt

$$10^{20} > n > 11^{4\beta_2}, \text{ d. h. } 2\beta_2 \leqq 8. \tag{31}$$

$2\beta_2 = 2$ oder $= 8$ führt zu $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \mid n$ und zu $\dfrac{\sigma(n)}{n} > 2$.

$2\beta_2 = 6$ liefert $\sigma(11^6) = 43 \cdot 45319 \mid n$. Dann ist wegen (19)

$$n > 5 \cdot 3^2 \cdot 11^6 \cdot 43^2 \cdot 45319^2 > 10^{20}. \tag{32}$$

$2\beta_2 = 4$ liefert $\sigma(11^4) = 5 \cdot 3221 \mid n$. Da aus $3 \cdot 5^2 \cdot 11 \mid n$ ein Widerspruch folgt[23]), muß

$$p = 5, \ \alpha = 1 \tag{33}$$

sein. Wir erhalten damit aus (18)

$$\begin{aligned} &5 \cdot 3^{2\beta_1} \cdot 11^4 \cdot 3221^{2\beta_3} q_4^{2\beta_4} \cdots q_r^{2\beta_r} \\ &= 3(1 + 3 + \cdots + 3^{2\beta_1}) \cdot 5 \cdot 3221 \cdot \sigma(3221^{2\beta_3}) \cdot \prod_{\varrho=4}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}). \end{aligned} \tag{34}$$

Nach (34) muß

$$3221 \mid \prod_{\varrho=4}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}) \tag{35}$$

sein, da $3221 \mid \sigma(3^{2\beta_1})$ wegen $3221 \not\equiv \pm 1 \pmod{12}$ unmöglich ist. Für ein $\varrho \geqq 4$ muß also

$$q_\varrho^{2\beta_\varrho + 1} \equiv 1 \pmod{3221} \tag{36}$$

gelten. Weil

$$3221 - 1 = 2^2 \cdot 5 \cdot 161 \tag{37}$$

ist, muß entweder

$$2\beta_\varrho + 1 \geqq 161 \tag{38}$$

oder

$$5 \mid 2\beta_\varrho + 1 \tag{39}$$

sein.

---

[22]) A. a. O. [15]).
[23]) A. a. O. [15]).

Aus (38) ergibt sich sogleich

$$n > q_\varrho^{2\beta_\varrho} \geqq 7^{160} > 10^{20}. \tag{40}$$

Im Fall (39) ist

$$1 + q_\varrho + \cdots + q_\varrho^4 \equiv 0 \pmod{3221}. \tag{41}$$

Nun besitzt die Kongruenz $1 + x + \cdots + x^4 \equiv 0 \pmod{3221}$ die vier Lösungen $x \equiv 11$, 11^2, 11^3, $1757 \pmod{3221}$. Weil 1757 keine Primzahl ist, muß also $q_\varrho > 3221$ sein. Dann ist aber nach (28)

$$n > q_\varrho^8 > 3000^8 > 10^{20}. \tag{42}$$

Die Annahme (29) widerspricht also $n < 10^{20}$. Wir können von nun an voraussetzen

$$11 \nmid n. \tag{43}$$

Jetzt können wir auch (25) verschärfen. Denn aus $r = 7$ folgt nach (23) und (43), unter Berücksichtigung, daß $3 \cdot 5 \cdot 7 \mid n$ zu $\frac{\sigma(n)}{n} > 2$ führt, die Abschätzung

$$n > 61 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29)^2 > 10^{20}. \tag{44}$$

Es bleiben somit noch die Möglichkeiten

$$r = 5, 6. \tag{45}$$

Wir wollen jetzt

$$17 \mid n \tag{46}$$

annehmen. Wenn $p = 17$ ist, folgt aus (18), daß n mindestens einen Primteiler $\equiv 1 \pmod{34}$ in mindestens der 16. Potenz enthält. Das liefert mit Hilfe von (28)

$$n > 103^{32}. \tag{47}$$

Wenn $q_2 = 17$ ist, so ist entweder ebenfalls $n > 10^{20}$ oder es gilt

$$17^{2\beta_2} \mid \frac{p+1}{2}. \tag{48}$$

Dann ist $p + 1 \geqq 2 \cdot 17^{2\beta_2}$, also

$$p \nmid 1 + 17 + \cdots + 17^{2\beta_2} < \frac{17}{16} \cdot 17^{2\beta_2}. \tag{49}$$

Aus (18) und (27) sehen wir, daß

$$\begin{aligned} 10^{20} > n &\geqq \frac{p+1}{2}\, \sigma(3^{2\beta_1})\, \sigma(17^{2\beta_2}) \prod_{\varrho=3}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}) \\ &\geqq 17^{2\beta_2}(1 + \cdots + 17^{2\beta_2})\,(2 \cdot 17^{2\beta_2} - 1)\,(1 + 3 + 3^2) \prod_{\varrho=3}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}) \\ &> 26 \cdot 17^{6\beta_2} \prod_{\varrho=4}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}) \end{aligned} \tag{50}$$

gelten muß. Daraus folgt sofort

$$2\beta_2 = 2 \text{ oder } = 4. \tag{51}$$

Im Fall $2\beta_2 = 4$ ergibt (50) die Ungleichung

$$10^{20} > 26 \cdot 17^{12} \prod_{\varrho=4}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}) > 1{,}5 \cdot 10^{16} \cdot \prod_{\varrho=4}^{r} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}), \tag{52}$$

d. h.

$$\prod_{\varrho=4} \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho}) < \frac{20000}{3} < 7000;\ r = 5;\ 2\beta_4 = 2\beta_5 = 2. \tag{53}$$

Nach (43) ergibt (53) einen Widerspruch, wenn $5 < q_4 < q_5$ ist. Wir können also

$$q_4 = 5,\ q_3 = 31,\ q_5 = 13 \tag{54}$$

annehmen. Dann liefert $\sigma(13^2) = 3 \cdot 61 \mid n$ einen Widerspruch.

Im Fall $2\beta_2 = 2$ folgt

$$\sigma(17^2) = 307 \mid n;\ q_3 = 307. \tag{55}$$

Da $307 \not\equiv \pm 1 \pmod{12}$ ist, folgt aus $2\beta_3 \geqq 4$ sofort

$$n > 307^4 \sigma(307^4)\, \sigma(3^{2\beta_1}) > 10^{20}. \tag{56}$$

Aus $2\beta_3 = 2$ ergibt sich

$$\sigma(307^2) = 3 \cdot 43 \cdot 733 \mid n. \tag{57}$$

Daraus erhalten wir wegen (48), d. h. $p \geqq 577$

$$n > 577 \cdot 3^2 \cdot 17^2 \cdot 307^2 \cdot 43^2 \cdot 733^2 > 10^{20}. \tag{58}$$

Die Annahme (46) hat zu Widersprüchen geführt. Von nun an sei

$$17 \nmid n. \tag{59}$$

Die Abschätzung

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{28} \cdot \frac{31}{30} \cdot \frac{61}{60} < 2 \tag{60}$$

zeigt uns, daß

$$(n, 5 \cdot 7) > 1 \tag{61}$$

sein muß. Wir wollen jetzt den Exponenten $2\beta_1$ von 3 nach oben abschätzen. Wir beachten dabei die früheren Ergebnisse über Kreisteilungspolynome[24]). Es sei zunächst

$$p \equiv 1 \pmod 3. \tag{62}$$

Dann folgt aus (18)

$$\begin{aligned} 10^{20} > n &\geqq \frac{p+1}{2} \sigma(3^{2\beta_1}) \prod_{\nu=1}^{2\beta_1} \left(1 + (6\nu + 1) + (6\nu + 1)^2\right) \\ &> 7 \cdot 3^{2\beta_1} \prod_{\nu=1}^{2\beta_1} 36\nu^2 = 7 \cdot 108^{2\beta_1} \left((2\beta_1)!\right)^2. \end{aligned} \tag{63}$$

Das liefert sogleich

$$2\beta_1 \leqq 6. \tag{64}$$

$2\beta_1 = 6$ ergibt $1093 \mid n$ und

$$n > 7 \cdot 1093 \cdot \sigma(7^2) \cdot \sigma(13^2) \cdot \sigma(19^2) \cdot \sigma(31^2) \cdot \sigma(37^2) \cdot \sigma(547^2) > 10^{20}. \tag{65}$$

Der Fall $2\beta_1 = 4$ ist nach (43) wegen $\sigma(3^4) = 11^2$ nicht möglich. Also haben wir aus der Annahme (62) die Bedingungen

$$2\beta_1 = 2;\ \sigma(3^2) = 13 \mid n \tag{66}$$

hergeleitet. Es sei nun

$$p \equiv 2 \pmod 3, \tag{67}$$

---

[24]) A. a. O. [5]).

d. h. nach (19) auch $p \not\equiv \pm 1 \pmod{12}$. Wir nehmen ferner an

$$3^{\xi} \mid p+1;\ 3^{\xi+1} \nmid p+1. \tag{68}$$

Wir erhalten aus (18)

$$\begin{aligned} n &> \frac{p+1}{2} \cdot p \cdot \sigma(3^{2\beta_1}) \prod_{\nu=1}^{2\beta_1-\xi} (1 + (6\nu+1) + (6\nu+1)^2) \\ &> 65 \cdot 3^{3\xi-3} \cdot 108^{2\beta_1-\xi} \cdot ((2\beta_1-\xi)!)^2 = f(\xi). \end{aligned} \tag{69}$$

Sofort sehen wir, daß für $\xi = 1, \ldots, 2\beta_1 - 1$ die Abschätzung

$$\frac{f(\xi+1)}{f(\xi)} = \frac{3^3}{108(2\beta_1-\xi)^2} < 1 \tag{70}$$

gilt. Also ist

$$n > f(2\beta_1) = 65 \cdot 3^{6\beta_1-3}. \tag{71}$$

Daraus erhalten wir

$$2\beta_1 \leqq 12. \tag{72}$$

a) $2\beta_1 = 12$ liefert $\sigma(3^{12}) = 797161 \mid n$ und $n > 797161^4 > 10^{20}$.

b) $2\beta_1 = 10$ liefert

$$n = p^{\alpha} \cdot 3^{10} \cdot 23^{2\beta_2} \cdot 3851^{2\beta_3} \cdot q_4^{2\beta_4} \cdots q_r^{2\beta_r}. \tag{73}$$

Ist hierin $2\beta_3 \geqq 4$, so folgt

$$n > 3851^8 > 10^{20}. \tag{74}$$

Also ist

$$\sigma(3851^2) = 13 \cdot 1141081 \mid n. \tag{75}$$

Dann ist aber $n > 1141081^4 > 10^{20}$.

c) $2\beta_1 = 8$ ergibt

$$n = p^{\alpha} \cdot 3^8 \cdot 13^{2\beta_2} \cdot 757^{2\beta_3} \cdot q_4^{2\beta_4} \cdots q_r^{2\beta_r}. \tag{76}$$

$2\beta_3 \geqq 4$ führt zu $n > 757^8 > 10^{20}$; also haben wir

$$\sigma(757^2) = 3 \cdot 13 \cdot 14713 \mid n,\ q_4 = 14713,\ 2\beta_4 = 2; \tag{77}$$

weiterhin $\sigma(14713^2) \equiv 0 \pmod{19}$, d. h. $19 \mid n$; $q_5 = 19$. Nach (61) ist außerdem noch 5 oder 7 ein Teiler von n. Da $\sigma(14713^2)$ zu $p \cdot 13 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 757$ teilerfremd ist, müßte

$$\sigma(14713^2) = 3 \cdot 19^b \leqq 3 \cdot 19^2 \tag{78}$$

sein[25]). Das ist aber ein Widerspruch.

d) $2\beta_1 = 6$ liefert $\sigma(3^6) = 1093 \mid n$; $q_2 = 1093$, $2\beta_2 = 2$; $\sigma(1093^2) = 3 \cdot 398581 \mid n$; $n > 398581^4 > 10^{20}$.

e) $2\beta_1 = 4$ ergibt wieder einen Widerspruch zu (43).

Wir sehen, daß (66) in jedem Fall gelten muß. Es sei nun

$$r = 6 \tag{79}$$

angenommen. Ist $5 \nmid n$, so erhalten wir nach (23), (43) und (59)

$$n \geqq 61 \cdot 7^6 \cdot 13^4 \cdot 3^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29^2 > 10^{20}. \tag{80}$$

---

[25]) A. a. O. [14]).

Ist $5 \mid n$, so ist $(n, 7 \cdot 11 \cdot 17) = 1$ und nach früheren Ergebnissen[26])

$$(81)\quad \begin{cases} n \geqq 149 \cdot 13^6 \cdot 5^4 \cdot (3 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29)^2 > 10^{20}, \text{ wenn } 5^6 \nmid n; \\ n \geqq 149 \cdot 5^6 \cdot 31^4 \cdot (3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23)^2 > 10^{20}, \text{ wenn } 5^6 \mid n,\ 5^6 \nmid p+1; \\ n \geqq p \cdot 5^6 \cdot 13^4 \cdot (3 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29)^2 > 10^{20} \text{ wegen } p \geqq 2 \cdot 5^6 - 1. \end{cases}$$

Da die Annahme (79) zu Widersprüchen geführt hat, können wir nach (45) von jetzt ab

$$(82)\qquad r = 5$$

voraussetzen. Die Abschätzung

$$(83)\qquad \frac{13}{9} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{29}{28} \cdot \frac{31}{30} \cdot \frac{61}{60} < 2$$

zeigt, daß $7 \mid n$ entweder $19 \mid n$ oder $23 \mid n$ nach sich zieht. Ist $23 \mid \sigma(q_\varrho^{2\beta_\varrho})$, so ist $2\beta_\varrho \geqq 10$ und $3 \neq q_\varrho \geqq 13$. Dann ist aber $n > 13^{20}$. Ist $23 \mid (1 + p^2 + p^4 + \cdots + p^{\alpha-1})$, so ist $\alpha \geqq 21$ und

$$(84)\qquad n \geqq p^\alpha \cdot \frac{1}{2}\sigma(p^\alpha) > \frac{1}{2} \cdot 5^{42} > 10^{20}.$$

Aus $23 \mid n$ folgt in jedem Fall $q_2 = 23$ und

$$(85)\qquad 23^{2\beta_2} \left| \frac{p+1}{2};\ p \geqq 2 \cdot 23^2 - 1. \right.$$

Nun ergibt

$$(86)\qquad \frac{13}{9} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{23}{22} \cdot \frac{29}{28} \cdot \frac{2 \cdot 23^2 - 1}{2 \cdot 23^2 - 2} < 2,$$

daß aus $7 \mid n$ auch

$$(87)\qquad 3^2 \cdot 13 \cdot 7^2 \cdot 19^2 \mid n$$

folgt.

a) $19^8 \mid n$ führt zu $n > 19^{16} > 10^{20}$.

b) Genau $19^6 \mid n$ liefert unter Beachtung, daß $\sigma(19^6)$ keine Quadratzahl ist, auch $n > 19^6 \cdot \sigma(19^6) \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 > 10^{20}$, wenn $p \neq 13$ ist und sonst

$$n > 19^6 \cdot \sigma(19^6) \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot q_4 > 10^{20}.$$

c) Genau $19^4 \mid n$ liefert $\sigma(19^4) = 151 \cdot 911 \mid n$. Dann ist aber

$$(88)\qquad \frac{\sigma(n)}{n} < \frac{13}{9} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{151}{150} \cdot \frac{911}{910} < 2.$$

d) Genau $19^2 \mid n$ ergibt $\sigma(19^2) = 3 \cdot 127 \mid n$. Dann muß n die folgende Gestalt besitzen:

$$(89)\qquad n = 13 \cdot 3^2 \cdot 7^{2\beta_3} \cdot 19^2 \cdot 127^2 \cdot 5419^2.$$

Dann liefert $\sigma(5419^2) \equiv 0 \pmod{31}$ sofort einen Widerspruch. $7 \mid n$ hat zu Widersprüchen geführt. Nach (61) können wir

$$(90)\qquad 5 \mid n$$

annehmen.

---

[26]) A. a. O. [15]).

Wir bekommen die beiden Fälle

$$(91)\qquad \begin{cases} \text{I. } n = 5^{\alpha} \cdot 3^2 \cdot 13^{2\beta_1} \cdot q_3^{2\beta_3} \cdots q_5^{2\beta_5}; \\ \text{II. } n = p^{\alpha} \cdot 3^2 \cdot 13^{2\beta_1} \cdot 5^{2\beta_2} \cdot q_4^{2\beta_4} q_5^{2\beta_5}. \end{cases}$$

$2\beta_2 > 2$ führt wegen $\sigma(13^8) = 3^2 \cdot 61 \cdot 1609669$, $\sigma(13^6) = 5229043$, $\sigma(13^4) = 30941$ sowie $\dfrac{30941+1}{2} = 3^4 \cdot 191$ bzw. $\sigma(30941^2) = 157 \cdot 433 \cdot 14083$ zu Widersprüchen. Wir erhalten so

$$(92)\qquad \sigma(13^2) = 3 \cdot 61 \mid n.$$

Der Fall I führt wegen $\sigma(61^4) = 5 \cdot 131 \cdot 21491$ zu

$$(93)\qquad n > 5 \cdot 3^2 \cdot 13^2 \cdot 61^4 \cdot 131^2 \cdot 21491^2 > 10^{20}.$$

Ist im Fall II $p = 61$, so ist auch $31 \mid n$. Aus $31^6 \mid n$ ergibt sich leicht $n > 10^{20}$; wir beachten, daß $\sigma(31^4) \equiv 0 \pmod{11}$ ist und $\sigma(31^2) = 3 \cdot 331$. Wir erhalten dann wieder $n > 10^{20}$ oder den Widerspruch $3^3 \mid n$.

Ist $p \neq 61$, so beachten wir die Gleichungen $\sigma(61^4) = 5 \cdot 131 \cdot 21491$ und $\sigma(61^2) = 3 \cdot 13 \cdot 97$. Ferner gilt die Kongruenz $\sigma(97^4) \equiv 0 \pmod{11}$. Aus alledem ergeben sich Widersprüche zu $n < 10^{20}$. Somit ist der Satz 4 vollständig bewiesen.

Eingegangen 20. August 1955.

Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie.

Von *Helmut Plünnecke* in Göttingen.

§ 1. Definitionen und Ergebnisse.

Kleine lateinische Buchstaben seien ganze, kleine griechische Buchstaben reelle Zahlen. Große deutsche Buchstaben bedeuten nichtleere Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen. Die Anzahlfunktion $A(n)$ der Menge $\mathfrak{A}$ ist die Anzahl der $a \in \mathfrak{A}$ mit $1 \leqq a \leqq n$. Die Zahl

$$\delta(\mathfrak{A}) = \alpha = \operatorname*{fin}_{n=1,2,3,\ldots} \frac{A(n)}{n}$$

nennen wir die finite Dichte von $\mathfrak{A}$, die Zahl

$$\delta^*(\mathfrak{A}) = \alpha^* = \lim_{n=1,2,3,\ldots} \frac{A(n)}{n}$$

die asymptotische Dichte von $\mathfrak{A}$. Die Anzahlfunktionen und Dichten der Mengen $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ bezeichnen wir mit den zugehörigen lateinischen und griechischen Buchstaben, also $B(n)$, $C(n), \ldots; \beta, \gamma, \ldots; \beta^*, \gamma^*, \ldots$.

Unter der Summenmenge zweier Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ verstehen wir die Menge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ aller $a + b$, wobei $a \in \mathfrak{A}$ und $b \in \mathfrak{B}$ ist. Für jedes natürliche r definieren wir

$$\mathfrak{B}_r = \{rs^2\}, \quad s = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

und mit beliebigem, aber festem $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}_r = \mathfrak{C}_r.$$

Gegenstand dieser Arbeit ist es nun, die folgenden beiden Abschätzungen herzuleiten:

$$\gamma_r^* \geqq \frac{\alpha^{*\frac{3}{4}}}{5\sqrt[4]{r}}, \tag{1.1}$$

$$\gamma_r \geqq \frac{\alpha^{\frac{3}{4}}}{10\sqrt[4]{r}} \text{ [1]}. \tag{1.2}$$

Der Beweis gründet sich auf Abwandlungen von Lemmata, die A. Buchstab in [2] zur Vereinfachung des Beweises eines Satzes von A. Chintschin [7] verwendet. Dieser Satz besagt, daß die Menge $\mathfrak{B}_1$ eine finite wesentliche Komponente ist[2]). Unser Beweisgang zerfällt in zwei Schritte und soll kurz angedeutet werden.

---

[1]) Beim Beweise erhalten wir zunächst die schärferen Ungleichungen

$$\gamma_r^* \geqq \frac{\alpha^{*\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{27r}} - \alpha^* \quad \text{und} \quad \gamma_r \geqq \frac{\alpha^{\frac{3}{4}}}{2\sqrt[4]{27r}} - \alpha;$$

vgl. (3. 6) und (4. 7).

[2]) *Buchstabs* Arbeit enthält beim Beweis des Lemmas 2 (das unserem Hilfssatz 1 entspricht) einen Fehlschluß; vgl. die Besprechung von *A. Chintschin*, Zbl. f. Math. 7, 399 (1934).

Zunächst wird die Anzahlfunktion von $\mathfrak{C}_r$ (nach unten) abgeschätzt, wenn die Anzahlfunktion von $\mathfrak{A}$ „schwach anwächst" (Hilfssatz 1). In diesem Falle werden zu den Elementen von $\mathfrak{B}_r$ alle Elemente von $\mathfrak{A}$ addiert, die in einem gewissen Intervall liegen. Denkt man sich von den Elementen von $\mathfrak{B}_r$ aus jeweils dieses Intervall abgetragen, so ergeben sich mehrfache Überdeckungen der so erhaltenen Intervalle. Entsprechend können auch mehrfache Darstellungen der in der angegebenen Weise zu gewinnenden Elemente aus $\mathfrak{C}_r$ auftreten; jedoch sichern jetzt die Voraussetzungen in Hilfssatz 1, daß die Anzahl der mehrfach auftretenden Elemente hinreichend günstig abgeschätzt werden kann. Bei A. Buchstab [2] findet sich an Stelle dieser mehrfachen Überdeckung nur eine zweifache Überdeckung.

Im Falle, daß die Anzahlfunktion von $\mathfrak{A}$ „stark anwächst" (Hilfssatz 2), werden zu geeigneten Elementen der Menge $\mathfrak{B}_r$ die Elemente von $\mathfrak{A}$ aus einem gewissen Intervall addiert. Die Auswahl der Elemente von $\mathfrak{B}_r$ wird jetzt so vorgenommen, daß keine mehrfachen Darstellungen möglich sind.

In beiden Fällen erhält man Abschätzungen, die zum Beweis der behaupteten Ungleichungen (1. 1) und (1. 2) hinreichen.

Durch Verallgemeinerung des Beweises lassen sich ähnliche Abschätzungen wie (1. 1) und (1. 2) auch für andere Mengen $\mathfrak{B}$ gewinnen[3]); ich beabsichtige, dies in einer späteren Veröffentlichung darzustellen.

§ 2. Hilfssätze.

s_0 sei eine beliebige natürliche Zahl;
k sei eine beliebige ganze Zahl $\geqq 2$;
$\bar{\alpha}$ sei eine beliebige reelle Zahl in den Grenzen $0 \leqq \bar{\alpha} \leqq 1$;
ϱ sei eine beliebige positive reeelle Zahl;
$t_n = \left[\sqrt{\frac{n}{r}}\right]$; t_n ist das maximale t mit der Eigenschaft $rt^2 \leqq n$;
$\tilde{A}_n = A(n) - A(n-1)$; für $n \geqq 1$ gilt dann $\tilde{A}_n = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \in \mathfrak{A}, \\ 0, & \text{wenn } n \notin \mathfrak{A}. \end{cases}$

Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Hilfssatz 1. *Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:*

(2. 1) $$n \geqq r(s_0 + k)^2, \text{ also } t_n \geqq s_0 + k;$$

(2. 2) *zu einem festen ε aus dem Intervall $0 \leqq \varepsilon \leqq \bar{\alpha}$ gebe es ein m_ε mit*
$$A(m) \geqq (\bar{\alpha} - \varepsilon)\, m \text{ für alle } m \geqq m_\varepsilon;$$

(2. 3) $$r(2ks_0 + k^2) \geqq m_\varepsilon;$$

(2. 4) $$A(2rkt_n) \leqq 2\bar{\alpha}\varrho rkt_n.$$

Dann gilt
$$C_r(n) \geqq \bar{\alpha}n(k - 4\bar{\alpha}\varrho^2 rk^3) - \bar{\alpha}k(k + s_0)\sqrt{rn} - \varepsilon kn.$$

Beweis. Zu jedem s in den Grenzen $s_0 \leqq s \leqq t_n - k$ betrachten wir die Zahlen $c \in \mathfrak{C}_r$ von der Form $c = rs^2 + a$, wobei $a \in \mathfrak{A}$ und $1 \leqq a \leqq r(s+k)^2 - rs^2 = r(2ks + k^2)$ ist. Dann gilt für alle diese Elemente $1 \leqq c \leqq n$, und jedem s werden genau $A\left(r(2ks + k^2)\right)$ Elemente c zugeordnet. Wir zählen nun die Elemente c so ab, daß wir bei jedem s nur

[3]) Z. B.: Für $1 < \varkappa \leqq 2$ sei $\mathfrak{B}_\varkappa = \left\{\left[s^\varkappa \left(\frac{5}{\varkappa - 1} + \sin \lg s\right)\right]\right\}$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, und $\mathring{\mathfrak{B}}_\varkappa = \{0\} \cup \mathfrak{B}_\varkappa$, dann gilt $\delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}_\varkappa) \geqq K\alpha^{*\frac{3}{4}}$ und $\delta(\mathfrak{A} + \mathring{\mathfrak{B}}_\varkappa) \geqq K'\alpha^{\frac{3}{4}}$, wobei K und K' nur von $\varkappa$ abhängige angebbare positive Konstanten sind.

die Anzahl $\sigma(s)$ derjenigen c bestimmen, die diesem s und keinem größeren s zugeordnet sind.

(2. 5) Für $m \geqq 0$ und $s \geqq s_0$ sei $L_s^{(m,k)}$ die Anzahl der geordneten Zahlenpaare (a, a') mit $a \in \mathfrak{A}$ und $a' \in \mathfrak{A}$, die die Gleichung $rs^2 + a = r(s+m)^2 + a'$ und die Ungleichungen

$$1 \leqq a \leqq r(s+k)^2 - rs^2 \text{ und } 1 \leqq a' \leqq r(s+m+k)^2 - r(s+m)^2$$

befriedigen.

Aus (2. 5) folgt

$$1 \leqq a' \leqq r(s+k)^2 - r(s+m)^2. \tag{2. 6}$$

Nun gilt

$$\sigma(s) \geqq A\left(r(2ks+k^2)\right) - \sum_{m=1}^{k-1} L_s^{(m,k)},$$

also

$$C_r(n) \geqq \sum_{s=s_0}^{t_n-k} \sigma(s) \geqq \sum_{s=s_0}^{t_n-k} A\left(r(2ks+k^2)\right) - \sum_{s=s_0}^{t_n-k} \sum_{m=1}^{k-1} L_s^{(m,k)}. \tag{2. 7}$$

Nach (2. 2) und (2. 3) ist

$$\begin{aligned} \sum_{s=s_0}^{t_n-k} A\left(r(2ks+k^2)\right) &\geqq (\bar{\alpha}-\varepsilon) r \sum_{s=s_0}^{t_n-k} (2ks+k^2) = (\bar{\alpha}-\varepsilon) rk (s_0+t_n)(t_n-k-s_0+1) \\ &\geqq (\bar{\alpha}-\varepsilon) rk \left(s_0 + \sqrt{\frac{n}{r}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{n}{r}} - k - s_0\right) \\ &\geqq (\bar{\alpha}-\varepsilon) rk \left(\frac{n}{r} - \sqrt{\frac{n}{r}}(k+s_0)\right). \end{aligned} \tag{2. 8}$$

Aus (2. 5) und (2. 6) folgt

$$L_s^{(m,k)} = \sum_{\nu=1}^{r(s+k)^2 - r(s+m)^2} \tilde{A}_\nu \tilde{A}_{\nu + r(s+m)^2 - rs^2};$$

für $t \geqq s_0$ und $1 \leqq m \leqq k-1$ ist daher

$$\begin{aligned} \sum_{s=s_0}^{t} L_s^{(m,k)} &\leqq \sum_{s=1}^{t} \sum_{\nu=1}^{r(t+k)^2 - r(t+m)^2} \tilde{A}_\nu \tilde{A}_{\nu + r(s+m)^2 - rs^2} \\ &= \sum_{\nu=1}^{r(t+k)^2 - r(t+m)^2} \left\{ \tilde{A}_\nu \sum_{s=1}^{t} \tilde{A}_{\nu + r(s+m)^2 - rs^2} \right\} \\ &\leqq \sum_{\nu=1}^{r(t+k)^2 - r(t+m)^2} \tilde{A}_\nu A\left(r(t+k)^2 - rt^2\right) \leqq A^2\left(r(2kt+k^2)\right). \end{aligned} \tag{2. 9}$$

Nach (2. 9) und (2. 4) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{s=s_0}^{t_n-k} \sum_{m=1}^{k-1} L_s^{(m,k)} &\leqq \sum_{m=1}^{k-1} A^2\left(r(2k(t_n-k)+k^2)\right) \leqq kA^2(2rkt_n) \\ &\leqq k \cdot 4\bar{\alpha}^2 \varrho^2 r^2 k^2 t_n^2 \leqq 4\bar{\alpha}^2 \varrho^2 r k^3 n. \end{aligned} \tag{2. 10}$$

Durch Einsetzen von (2. 8) und (2. 10) in (2. 7) ergibt sich

$$\begin{aligned} C_r(n) &\geqq (\bar{\alpha}-\varepsilon) rk \left(\frac{n}{r} - \sqrt{\frac{n}{r}}(k+s_0)\right) - 4\bar{\alpha}^2 \varrho^2 r k^3 n \\ &\geqq \bar{\alpha} n (k - 4\bar{\alpha}\varrho^2 r k^3) - \bar{\alpha} k (k+s_0)\sqrt{rn} - \varepsilon kn, \text{ q. e. d.} \end{aligned}$$

Hilfssatz 2. *Es sei*

$$n \geqq 0 \tag{2.11}$$

und

$$A(h) \geqq \bar{\alpha}\varrho h \text{ für ein natürliches } h. \tag{2.12}$$

Dann gilt

$$C_r(n) \geqq \bar{\alpha}\varrho n\left(1 - \frac{2rt_n}{h}\right) - \bar{\alpha}\varrho\,(h + r(2t_n + 1)). \tag{2.13}$$

Beweis. Sei $u_1 = 0$ und $u_{m+1} =$ kleinste Zahl von der Form rs^2, die $\geqq u_m + h$ ist; $m = 1, 2, 3, \ldots$. Dann gilt für $m = 1, 2, 3, \ldots$, sofern $u_m \leqq n - h$ ist,

$$u_{m+1} - u_m \leqq h + r(2t_n + 1).$$

Daher können wir sicher ein $u_p (p \geqq 1)$ so finden, daß $n - h - r(2t_n + 1) \leqq u_p \leqq n$ gilt. Also folgt

$$u_1 < u_2 < \cdots < u_{p+1},$$

$$h \leqq u_{m+1} - u_m \leqq h + 2rt_n \text{ für } 1 \leqq m < m + 1 \leqq p;$$

$$(p-1)\,h \leqq u_p,\ p - 1 \leqq \frac{u_p}{h} \leqq \frac{n}{h};$$

$$(p-1)\,h + (p-1)\cdot 2rt_n \geqq u_p,$$

$$\begin{aligned}(p-1)\,h &\geqq u_p - (p-1)\cdot 2rt_n \geqq n - h - r(2t_n + 1) - \frac{n}{h}\cdot 2rt_n \\ &= n\left(1 - \frac{2rt_n}{h}\right) - h - r(2t_n + 1).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Zu jedem m in den Grenzen $1 \leqq m \leqq p - 1$ betrachten wir die Zahlen $c \in \mathfrak{C}_r$ von der Form

$$c = u_m + a, \text{ wobei } a \in \mathfrak{A} \text{ und } 1 \leqq a \leqq h$$

ist, und erhalten nach (2.12)

$$C_r(n) \geqq (p-1)\,A(h) \geqq \bar{\alpha}\varrho(p-1)\,h. \tag{2.15}$$

Einsetzen von (2.14) in (2.15) liefert die Behauptung (2.13).

Hilfssatz 3. *Unter den Voraussetzungen*

(2.16) [(2.1), (2.11)] $\quad n \geqq r(s_0 + k)^2,$

(2.17) [(2.2)] *zu einem festen ε aus dem Intervall $0 \leqq \varepsilon \leqq \bar{\alpha}$ gebe es ein m_ε mit* $A(m) \geqq (\bar{\alpha} - \varepsilon)\,m$ *für alle* $m \geqq m_\varepsilon$,

(2.18) [(2.3)] $\quad r(2ks_0 + k^2) \geqq m_\varepsilon$

gilt

$$C_r(n) \geqq n\cdot \mathrm{Min}\left\{\bar{\alpha}\left(k - 4\bar{\alpha}\varrho^2 rk^3 - k(k+s_0)\sqrt{\frac{r}{n}}\right) - \varepsilon k;\ \bar{\alpha}\left(\varrho\left(1 - \frac{1}{k}\right) - 2\varrho(k+1)\sqrt{\frac{r}{n}} - \frac{r\varrho}{n}\right)\right\}.$$

Beweis. Entweder gilt (2.4), dann ist Hilfssatz 1 anwendbar; oder (2.12) gilt mit $h = 2rkt_n$ und Hilfssatz 2 ist anwendbar, dabei wird abgeschätzt

$$\bar{\alpha}\varrho(h + r(2t_n + 1)) = \bar{\alpha}\varrho(2rkt_n + 2rt_n + r) \leqq \bar{\alpha}\varrho\left(2r(k+1)\sqrt{\frac{n}{r}} + r\right) = \bar{\alpha}n\left(2\varrho(k+1)\sqrt{\frac{r}{n}} + \frac{r\varrho}{n}\right).$$

§ 3. Beweis im asymptotischen Fall.

Sei $\bar{\alpha} = \alpha^*$. Da (1. 1) für $\alpha^* = 0$ sicher gilt, sei im folgenden $\alpha^* > 0$ vorausgesetzt. Dann ist (2. 17) für alle ε aus dem Intervall $0 < \varepsilon \leqq \alpha^*$ erfüllt; bei festem ε aus diesem Intervall gilt (2. 18) für hinreichend großes s_0. Daraus folgt

Hilfssatz 4.

$$\gamma_r^* \geqq \alpha^* \cdot \operatorname{Min}\left\{k - 4\alpha^* \varrho^2 r k^3;\ \varrho\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Beweis. Wir erhalten die Behauptung aus Hilfssatz 3 durch Hintereinanderausführen der Grenzübergänge[4]) $n \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$.

Beweis von (1. 1). Die behauptete Abschätzung erhalten wir durch spezielle Wahl von k und ϱ in Hilfssatz 4. Sei

$$F(\varkappa, \varrho, \alpha^*) = \varkappa - 4\alpha^* \varrho^2 r \varkappa^3. \tag{3. 1}$$

Aus $\dfrac{\partial F(\varkappa, \varrho, \alpha^*)}{\partial \varkappa} = 0$ und $\varkappa \geqq 0$ folgt $\varkappa = \varkappa_0(\varrho, \alpha^*) = \dfrac{1}{2\varrho\sqrt{3r\alpha^*}}$. Wir wählen

$$k = k_0(\varrho, \alpha^*) = [\varkappa_0(\varrho, \alpha^*)], \tag{3. 2}$$

und damit $k \geqq 2$ ist, fordern wir

$$\varkappa_0(\varrho, \alpha^*) \geqq 3. \tag{3. 3}$$

Einsetzen liefert

$$F(k_0, \varrho, \alpha^*) \geqq \varkappa_0 - 1 - 4\alpha^* \varrho^2 r \varkappa_0^3 = \frac{2}{3}\varkappa_0 - 1. \tag{3. 4}$$

(3. 5) Aus $\dfrac{2}{3}\varkappa_0(\varrho, \alpha^*) = \varrho$ und $\varrho > 0$ folgt $\varrho = \varrho_0(\alpha^*) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{27 r \alpha^*}}$.

Nach Hilfssatz 4, (3. 4) und (3. 5) gilt daher, falls $\varkappa_0(\varrho_0, \alpha^*) \geqq 3$ ist,

$$\begin{aligned}\gamma_r^* &\geqq \alpha^* \cdot \operatorname{Min}\left\{\frac{2}{3}\varkappa_0(\varrho_0, \alpha^*) - 1;\ \varrho_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{k_0(\varrho_0, \alpha^*)}\right)\right\} \\ &\geqq \alpha^* \cdot \operatorname{Min}\left\{\varrho_0(\alpha^*) - 1;\ \varrho_0(\alpha^*) - \frac{3\varrho_0(\alpha^*)}{2\varkappa_0(\varrho_0, \alpha^*)}\right\} = \alpha^*(\varrho_0(\alpha^*) - 1),\end{aligned}$$

$$\gamma_r^* \geqq \alpha^*(\varrho_0(\alpha^*) - 1) = \alpha^*\left(\frac{1}{\sqrt[4]{27 r \alpha^*}} - 1\right). \tag{3. 6}$$

(3. 6) gilt auch, wenn $\varkappa_0(\varrho_0, \alpha^*) < 3$ ist, denn dann folgt

$$\varrho_0 = \frac{2}{3}\varkappa_0(\varrho_0, \alpha^*) < 2,$$

und (3. 6) ist wegen $\gamma_r^* \geqq \alpha^*$ erfüllt.

Aus (3. 6) erhalten wir schließlich die Behauptung (1. 1)

$$\gamma_r^* \geqq \frac{\alpha^*}{2\sqrt[4]{27 r \alpha^*}} > \frac{\alpha^*}{4\sqrt[4]{2 r \alpha^*}} \geqq \frac{\alpha^{*\frac{3}{4}}}{5\sqrt[4]{r}}.$$

§ 4. Beweis im finiten Fall.

Sei $\bar{\alpha} = \alpha$. Dann sind (2. 17) und (2. 18) mit $\varepsilon = 0$, $m_\varepsilon = 0$ und $s_0 = 1$ erfüllt. Da (1. 2) für $\alpha = 0$ sicher gilt, sei im folgenden $\alpha > 0$ angenommen.

---

[4]) Seien $\{\xi_i\}$, $\{\eta_i\}$, $\{\zeta_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ Mengen reeller Zahlen und $\xi_i \geqq \operatorname{Min}(\eta_i, \zeta_i)$ für alle i; dann gilt $\underline{\lim}\, \xi_i \geqq \underline{\lim} \operatorname{Min}(\eta_i, \zeta_i) = \operatorname{Min}(\underline{\lim}\, \eta_i, \underline{\lim}\, \zeta_i)$.

Hilfssatz 5. *Sei $\alpha > 0$ und n_0 eine natürliche Zahl. Dann gilt für alle n in den Grenzen $1 \leqq n \leqq n_0$*

$$\frac{C_r(n)}{n} \geqq \frac{1}{n_0}.$$

Beweis. Da $0 \in \mathfrak{B}_r$ und wegen $\alpha > 0$ auch $1 \in \mathfrak{A}$ ist, folgt für $1 \leqq n \leqq n_0$

$$\frac{C_r(n)}{n} \geqq \frac{1}{n} \geqq \frac{1}{n_0}, \text{ q. e. d.}$$

Hilfssatz 6. *Sei $\alpha > 0$ und $n_0 \geqq r(k+1)^2$. Dann gilt*

$$\gamma_r \geqq \alpha \cdot \operatorname{Min}\left\{F(k, \varrho, \alpha) - H(k, n_0);\ \varrho\left(1 - \frac{1}{k}\right) - J(k, \varrho, n_0);\ \frac{1}{\alpha n_0}\right\}$$

mit

$$F(k, \varrho, \alpha) = k - 4\alpha\varrho^2 r k^3 \text{ [5]},$$

$$H(k, n_0) = k(k+1)\sqrt{\frac{r}{n_0}} \text{ und } J(k, \varrho, n_0) = 2\varrho(k+1)\sqrt{\frac{r}{n_0}} + \frac{r\varrho}{n_0}.$$

Beweis. Für $n \geqq n_0$ schätzen wir $\frac{C_r(n)}{n}$ nach Hilfssatz 3 ab, für $1 \leqq n \leqq n_0$ nach Hilfssatz 5. Durch Übergang zum $\underline{\text{fin}}$ erhalten wir die Behauptung.

Beweis von (1. 2). Wir wählen analog wie beim Beweise im asymptotischen Fall

[(3. 5)] $$\varrho = \varrho_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt[4]{27 r\alpha}},$$

[(3. 2), (3. 5)] $$k = k'(\alpha) = \left[\frac{3}{2}\varrho_0(\alpha)\right] \text{ [6]},$$

und fordern

[(3. 3), (3. 5)] $$\varrho_0(\alpha) \geqq 2.$$

Dann ist

(4. 1) [(3. 4), (3. 5)] $$F(k', \varrho_0, \alpha) \geqq \varrho_0 - 1,$$

(4. 2) $$H(k', n_0) \leqq \frac{3}{2}\varrho_0 \cdot 2\varrho_0\sqrt{\frac{r}{n_0}} = 3\varrho_0^2\sqrt{\frac{r}{n_0}} = H_0,$$

(4. 3) $$J(k', \varrho_0, n_0) \leqq 2\varrho_0 \cdot 2\varrho_0\sqrt{\frac{r}{n_0}} + \frac{r\varrho_0}{n_0} = 4\varrho_0^2\sqrt{\frac{r}{n_0}} + \frac{r\varrho_0}{n_0} = J_0.$$

Wir wählen $n_0 = [54 r\varrho_0^3] \geqq 53 r\varrho_0^3$; dann ist, wie in Hilfssatz 6 gefordert,

$$n_0 \geqq 53 r\varrho_0^2 \geqq r(2k')^2 \geqq r(k'+1)^2.$$

Weiter folgt

(4. 4) $$H_0 < J_0 \leqq \varrho_0\left(\frac{4}{\sqrt{53 \cdot 2}} + \frac{1}{53}\right) \leqq \varrho_0\left(\frac{4}{10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{\varrho_0}{2},$$

(4. 5) $$\frac{1}{\alpha n_0} \geqq \frac{\left(\sqrt[4]{27 r\alpha}\right)^3}{54 r\alpha} = \frac{27}{54} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{27 r\alpha}} = \frac{\varrho_0}{2}.$$

---

[5]) Entspricht der Definition von $F(\varkappa, \varrho, \alpha^*)$ in (3. 1).

[6]) $k'(\alpha)$ entspricht $k_0(\varrho_0(\alpha^*), \alpha^*)$.

Wegen $k' \geqq \frac{3}{2}\varrho_0 - 1 \geqq \varrho_0$ ist

$$\varrho_0\left(1 - \frac{1}{k'}\right) \geqq \varrho_0 - 1. \tag{4. 6}$$

Tragen wir die Abschätzungen (4. 1) bis (4. 6) in Hilfssatz 6 ein, so erhalten wir

$$\gamma_r \geqq \alpha\left(\frac{\varrho_0(\alpha)}{2} - 1\right) = \alpha\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{27r\alpha}} - 1\right); \tag{4. 7}$$

(4. 7) gilt wegen $\gamma_r \geqq \alpha$ auch, wenn $\varrho_0(\alpha) < 2$ ist.

Aus (4. 7) folgt schließlich die Behauptung (1. 2)

$$\gamma_r \geqq \frac{\alpha}{4\sqrt[4]{27r\alpha}} > \frac{\alpha}{8\sqrt[4]{2r\alpha}} \geqq \frac{\alpha^{\frac{3}{4}}}{10\sqrt[4]{r}}.$$

Literaturverzeichnis.

[1] *A. Brauer*, Über die Dichte der Summe zweier Mengen, deren eine von positiver Dichte ist. Math. Zeitschr. **44**, 212—232 (1939).

[2] *A. Buchstab*, Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie. Mat. Sbornik **40**, 190—195 (1933), russisch.

[3] *J. G. v. d. Corput*, On sets of integers. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 252—261 = Indagat. Math. **9**, 159 bis 168 (1947).

[4] *P. Erdös*, On the arithmetical density of the sum of two sequences, one of which forms a basis for the integers. Acta arithm. **1**, 197—200 (1936).

[5] *P. Erdös*, On the asymptotic density of the sum of two sequences, one of which forms a basis for the integers II. Trav. Inst. Math. Tbilissi **3**, 217—224 (1938), engl. mit russ. Auszug.

[6] *F. Kasch*, Abschätzung der Dichte von Summenmengen I, II. Math. Zeitschr. **62**, 368—387 (1955), **64**, 243—257 (1956).

[7] *A. Khintchine* (= *Chintschin*), Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie. Mat. Sbornik **40**, 180—189 (1933).

[8] *H. Klöter*, Über wesentliche Komponenten in der additiven Zahlentheorie. Dissertation Köln (1948), 26 S. Maschinenschrift.

[9] *H. Klöter* u. *A. Stöhr*, Wesentliche Komponenten und asymptotische Dichte. Journ. reine angew. Math. **194**, 210—217 (1955).

[10] *M. Kneser*, Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen. Math. Zeitschr. **58**, 459—484 (1953).

[11] *E. Landau*, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie. Cambridge Tracts No. 35 (1937).

[12] *S. Morimoto*, Eine Verschärfung des Satzes von Khintchine. Tôhoku Math. Journ. **43**, 1—3 (1937).

[13] *H. Rohrbach*, Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **48**, 199—236 (1938).

[14] *S. Selberg*, Note on a metrical problem in the additive theory of numbers. Arch. Math. Naturvid. **47**, 111 bis 118 (1944).

[15] *A. Stöhr*, Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie III. (Vereinfachter Beweis eines Satzes von A. Brauer.) Journ. reine angew. Math., **195**, 172—174 (1955).

[16] *A. Stöhr* u. *E. Wirsing*, Beispiele von wesentlichen Komponenten, die keine Basen sind. Journ. reine angew. Math., **196**, 96—98 (1956).

Zusatz bei der Korrektur:

[1a] *A. Brauer*, On the Schnirelmann density of the sum of two sequences. Math. Zeitschr. **63**, 529—541 (1956).

Eingegangen 4. September 1955.

The solution of linear differential systems by quadratures.

By *B. Bernstein* and *C. Truesdell*,

Graduate Institute for Mathematics and Mechanics, Indiana University*).

I. Introduction.

1. *Purpose.* Little attention has been given to explicit solution of systems of differential equations. Thus Kamke's catalogue[1]) of known solutions, while listing nearly 1500 single equations, contains less than 90 systems. Many of these may be subsumed as particular cases under a simple algebraic method which although almost self-evident appears not yet to have been formulated in general terms. Our purpose is to present this method[2]).

2. *Linear systems and reduced forms.* We consider the general linear system of nth order in the independent variable t

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t)\, x_j + b_i(t), \quad \text{or} \quad \dot{x} = A(t)\, x + b(t), \tag{2. 1}$$

where $A_{ij}(t)$ and $b_i(t)$ are continuous. If the matrix A is *subdiagonal* (*i. e.*, $A_{ij} = 0$ if $j > i$), the system (2. 1) may be solved by quadratures. This is so because the first member is a linear equation for x_1 alone and hence may be solved by quadratures; this solution when put into the second member reduces it to a linear equation for x_2 alone, etc. More generally, if A is *k-subdiagonal* (*i. e.*, if $A_{ij} = 0$ for $j > i$, $i \leqq k$) the first k unknowns x_i may be determined by quadratures, and thus the original system may be reduced to one of $(n - k)^{\text{th}}$ order.

If the matrix A is *k-diagonal* (*i. e.*, if $A_{ij} = 0$ for $i \neq j$, $i \leqq k$) the first k equations are independent of one another and may be solved separatly by quadratures. The solution x_i of any of these equations is unaffected by the initial values of the x_j for $j \neq i$.

3. *Transformation to the reduced forms.* Let T be a non-singular matrix whose entries are constants. From (2. 1) follows

$$(Tx)^{\cdot} = T\dot{x} = (TAT^{-1})\, Tx + Tb. \tag{3. 1}$$

Thus Tx satisfies a linear system of nth order. If TAT^{-1} is subdiagonal, Tx may be calculated by quadratures, and hence so may $x = T^{-1}(Tx)$. Pursuit of this idea suggests the following definition and theorem:

---

*) This work was carried out under joint contract from the Office of Naval Research and the Army Office of Ordnance Research to Indiana University.

[1]) Part C of *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen* **1**, 3rd ed., Leipzig (1944).

[2]) For the case when the coefficients of the differential system are constants, our method reduces to one which is more or less well known, being the second of the two given in § 4 of Ch. III of *S. Lefschetz, Lectures on Differential Equations*, Princeton, 1946, though it does not appear in *Kamke*'s treatise.

Definition 3. 1. *If there exists a constant non-singular matrix T such that $TA(t)\,T^{-1}$ is k-subdiagonal (k-diagonal) (subdiagonal) then $A(t)$ can be k-subdiagonalized (k-diagonalized) (subdiagonalized).*

Theorem 3. 2. *If $A(t)$ can be k-subdiagonalized, k linearly independent integrals of* (2. 1) *can be obtained by quadratures. If $A(t)$ can be k-diagonalized, there exist k independent linear combinations of the x_i ("simple modes") such that each satisfies a single linear differential equation of first order.*

Corollary 3. 3. *If $A(t)$ can be subdiagonalized, the general solution of* (2. 1) *can be gotten by quadratures.*

Remark 3. 4. If the matrix T which renders TAT^{-1} k-subdiagonal (k-diagonal) is known, the k integrals (simple modes) whose existence is asserted by Theorem 3. 2 may be constructed in a straightforward way, as explained at the end of § 2. Thus the entire problem is reduced to one of finding certain standard forms for the variable matrix $A(t)$.

Part II is devoted to discovery of necessary and sufficient conditions that there exist a T such that TAT^{-1} is k-subdiagonal, subdiagonal, k-diagonal, or diagonal.

N. B. For any $A(t)$ there exists a $T(t)$ such that TAT^{-1} is subdiagonal. Such a $T(t)$ is of no use here, for (3. 1) would not hold and consequently the equation satisfied by Tx would not in general be soluble by quadratures unless $\dot{T}T^{-1}$ also happened to be subdiagonal. For $TA(t)\,T^{-1}$ to assume a subdiagonal form for some *constant* T is indeed a special case. The main object of this paper is to find necessary and sufficient conditions that this special case shall hold.

II. Algebraic theorems.

4. *Reduction to constant matrices.* We suppose $t \in I$, where I is a fixed real interval. All functions and constants may have complex values. Subscript indices indicate components of vectors or matrices; all superscripts are enumerative. $A(t) = \| A_{ij}(t) \|$ is an $n \times n$ matrix. Let $\mathfrak{M}$ be the vector space of $n \times n$ constant matrices. The variable matrix $A(t)$ is regarded as a family of elements of this space. Let $\mathfrak{M}^A$ be the smallest subspace of $\mathfrak{M}$ which contains $A(t)$.

Definition 4. 1. *Let $r = \operatorname{Dim} A$ be the number of linearly independent entries $A_{ij}(t)$ in the matrix A.* (Hence $r \leqq n^2$.)

Let $f^1(t), \ldots, f^r(t)$ be a basis[3]) for the vector space of the functions $A_{ij}(t)$ over the complex numbers. Then

$$A_{ij}(t) = \sum_{\nu=1} A^\nu_{ij} f^\nu(t). \tag{4. 1}$$

The r matrices $A^\nu = \| A^\nu_{ij} \|$ are linearly independent, for if they were not so then less than r of the f^ν would span the space of the A_{ij}, contradicting the assumption that the f^ν constitute a basis. We may write (4. 1) in the matrix form

$$A(t) = \sum_{\nu=1}^{r} A^\nu f^\nu(t). \tag{4. 2}$$

Lemma 4. 2. *The A^ν constitute a basis for $\mathfrak{M}^A$.*

Proof. The subspace $\mathfrak{M}^r$ spanned by the A^ν contains $A(t)$ by (4. 2); hence $\mathfrak{M}^r > \mathfrak{M}^A$. Any proper subspace of $\mathfrak{M}^r$ must have lesser dimension and hence by the definition of the f^ν it cannot contain $A(t)$ and therefore cannot contain $\mathfrak{M}^A$. Q. E. D.

[3]) As stated earlier, $t \in I$, where I is a fixed interval. For different intervals in general different bases will be required.

Theorem 4. 3. *Given a non-singular T, necessary and sufficient that $TA(t)\,T^{-1}$ be subdiagonal is that the r constant matrices $TA^{\nu}T^{-1}$ be subdiagonal.*

Proof. By (4. 2), sufficiency is clear. To prove necessity, recall that the transformation TRT^{-1} is an automorphism of the space of complex $n \times n$ matrices R. Such an automorphism will carry $A(t)$ into the subspace consisting of subdiagonal matrices if and only if it carries $\mathfrak{M}^A$ into this subspace. But then it must take the A^{ν} into this subspace, since they form a basis for $\mathfrak{M}^A$. Hence $TA^{\nu}T^{-1}$ must be subdiagonal. Q. E. D.

Corollary 4. 4. *A necessary condition that $A(t)$ can be subdiagonalized is*

$$\operatorname{Dim} A \leqq \tfrac{1}{2}\,n(n+1).$$

Proof. The dimension of the subspace consisting of subdiagonal matrices is $\frac{1}{2}\,n(n+1)$, while $\dim \mathfrak{M}^A = r = \operatorname{Dim} A$, and dimension is preserved under automorphism. Q. E. D.

We have shown that $A(t)$ can be subdiagonalized if and only if the constant matrices A^{ν} can be subdiagonalized simultaneously. Analogous reasoning proves

Theorem 4. 5. *$A(t)$ can be k-subdiagonalized (k-diagonalized) if and only if the A^{ν} can be k-subdiagonalized (k-diagonalized) simultaneously.*

5. *Simultaneous subdiagonalization of constant matrices.* We record the obvious

Lemma 5. 1. *Set*

$$\varepsilon^i_j = \delta_{ij}. \tag{5. 1}$$

Then for any $n \times n$ matrix A we have identically

$$\varepsilon^i A = \sum_{j=1}^{r} A_{ij}\,\varepsilon^j. \tag{5. 2}$$

Let $\mathfrak{M}^i$ denote a subspace of the space $\mathfrak{C}$ of complex row n-vectors, with $\mathfrak{M}^0$ as the null space.

Theorem 5. 2. *Necessary and sufficient that $A^1, \ldots, A^r$ can be subdiagonalized is the existence of $\mathfrak{M}^1, \ldots, \mathfrak{M}^n$ such that the conditions*

$$\text{a}^i.\ \ \mathfrak{M}^{i-1} < \mathfrak{M}^i, \qquad \text{b}^i.\ \ \mathfrak{M}^i A^{\nu} < \mathfrak{M}^i, \qquad \text{c}^i.\ \ \dim \mathfrak{M}^i = i,$$

hold for $i = 1, \ldots, n$; $\nu = 1, \ldots, r$.

Proof of necessity. Suppose that $TA^{\nu}T^{-1}$ is subdiagonal. Let $\mathfrak{M}^i_0$ be the set of row vectors of which at most the first i components differ from zero. To satisfy a^i, b^i, and c^i, set $\mathfrak{M}^i \equiv \mathfrak{M}^i_0\,T$.

Proof of sufficiency. If $\alpha^i \varepsilon\, \mathfrak{M}^i - \mathfrak{M}^{i-1}$, then $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ constitute a basis for $\mathfrak{C}$, and hence there exists a T such that $\alpha^i T^{-1} = \varepsilon^i$, where ε^i is defined by (5. 1). Set $B^{\nu} = TA^{\nu}T^{-1}$. Then $\varepsilon^i B^{\nu} = \alpha^i A^{\nu} T^{-1}$. Since A^{ν} preserves $\mathfrak{M}^i$, $\alpha^i A^{\nu}$ is linearly dependent on the first i of the α' s; hence, by the equation just proved, $\varepsilon^i B^{\nu}$ is linearly dependent on the first i of the ε' s. By applying Lemma 5. 1 to B^{ν} we thus get

$$B^{\nu}_{ij} = 0 \text{ for } j = i+1, \ldots, n;\ \ \nu = 1, \ldots, r. \tag{5. 3}$$

Corollary 5. 3. *A set of 2×2 matrices can be subdiagonalized if and only if they possess a common proper vector.*

6. *Constructive k-subdiagonalization.* Supposing the A^{ν} can be k-subdiagonalized, with k-subdiagonal forms B^{ν}, we now determine whether or not it is possible to $(k+1)$-subdiagonalize them, and if so, we give a construction for a $(k+1)$-subdiagonal form. By hypothesis, then, there is a T such that if $TA^{\nu}T^{-1} = B^{\nu}$, then $B^{\nu}_{ij} = 0$ if $i \leqq k$, $j > i$.

The construction used in the proof of sufficiency for Theorem 5. 2 shows that if $\mathfrak{M}^i$ is the space spanned by $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^i$; $i = 1, \ldots, k$, then the $\mathfrak{M}^i$ satisfy the conditions a^i, b^i, c^i for $i = 1, \ldots, k$. To achieve $(k+1)$-subdiagonalization, the same argument shows that we must construct a subspace $\mathfrak{M}^{k+1}$ such that conditions a^{k+1}, b^{k+1}, c^{k+1} are satisfied. Theorem 6. 1, below, gives a necessary and sufficient condition that this be possible. Theorem 6. 4 shows that the existence of $\mathfrak{M}^{k+1}$ is in fact sufficient and exhibits a matrix T which effects $(k+1)$-subdiagonalization.

Write $\mathfrak{M}^{k\perp}$ for the subspace spanned by $\varepsilon^{k+1}, \ldots, \varepsilon^n$. Set

$$E^k_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ if } i \neq j; \\ 0 \text{ if } i = j,\ i \leq k; \\ 1 \text{ if } i = j,\ i > k. \end{cases} \tag{6. 1}$$

Then E^k is the identity on $\mathfrak{M}^{k\perp}$ while zero on $\mathfrak{M}^k$.

Theorem 6. 1. *$\mathfrak{M}^{k+1}$ exists if and only if the $B^\nu E^k$ have a common proper vector.*

Proof of sufficiency. Let a common proper vector be x, and let it span $\mathfrak{X}$, and let the corresponding proper numbers be λ^ν. We have

$$xB^\nu = y^\nu + z^\nu; \quad y^\nu \varepsilon \mathfrak{M}^{k\perp},\ z^\nu \varepsilon \mathfrak{M}^k. \tag{6. 2}$$

Hence

$$xB^\nu E^k = (y^\nu + z^\nu) E^k = y^\nu = \lambda^\nu x. \tag{6. 3}$$

Hence $x \varepsilon \mathfrak{M}^{k\perp}$. Therefore $\dim (\mathfrak{M}^k + \mathfrak{X}) = k+1$. Also $(\mathfrak{M}^k + \mathfrak{X}) B^\nu < \mathfrak{M}^k + \mathfrak{X} B^\nu = \mathfrak{M}^k + \mathfrak{X}$, where the last step follows by (6. 2) and (6. 3). Thus we may set $\mathfrak{M}^{k+1} = \mathfrak{M}^k + \mathfrak{X}$.

Proof of necessity. Let $x \in \mathfrak{M}^{k+1} \cap \mathfrak{M}^k$, $x \neq 0$. Then by b^{k+1} follows $xB^\nu = \lambda^\nu x + y^\nu$, where $y^\nu \in \mathfrak{M}^k$. Hence $xB^\nu E^k = \lambda^\nu x E^k = \lambda^\nu x$. Q. E. D.

Remark 6. 2. The equation of proper numbers for $B^\nu E^k$ is

$$\sum_{j=k+1}^{n} x_j B^\nu_{ji} = \lambda^\nu x_i, \quad i = k+1, \ldots, n. \tag{6. 4}$$

Remark 6. 3. If (6. 3) for $\nu = 1, \ldots, r$ has a common solution x, then the last sentence in the proof of sufficiency constructs $\mathfrak{M}^{k+1}$.

Theorem 6. 4. *Existence of $\mathfrak{M}^{k+1}$ satisfying a^{k+1}, b^{k+1}, c^{k+1} is sufficient for $(k+1)$-subdiagonalization.*

Proof (by exhibition). By (6. 3), the common proper vector x is of the form

$$x = (0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n). \tag{6. 4}$$

Form the $n \times (n+1)$ matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{k+1} & x_{k+2} & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{6. 5}$$

and, starting from the bottom, strike out the first row which depends linearly on those above it. Call the resulting non-singular matrix T. Then

$$\varepsilon^i T = \varepsilon^i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{6. 6}$$

$$\varepsilon^{k+1} T = x. \tag{6. 7}$$

Set $C^\nu = TB^\nu T^{-1}$. We first verify that C^ν is k-subdiagonal. By (6. 6), Lemma 5. 1, and the fact that B^ν is k-subdiagonal we have for $i = 1, \ldots, k$

$$(6.\ 8)\qquad \varepsilon^i C^\nu = \varepsilon^i B^\nu T^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{k} B^\nu_{ij}\varepsilon^j\right) T^{-1} = \sum_{j=1}^{k} B^\nu_{ij}(\varepsilon^j T^{-1}) = \sum_{j=1}^{n} B^\nu_{ij}\varepsilon_j = \varepsilon^i B^\nu,$$

or $C^\nu_{pm} = B^\nu_{pm}$ for $p = 1, \ldots, k$. *A fortiori*, C^ν is k-subdiagonal. Now by (6. 7)

$$(6.\ 9)\qquad \varepsilon^{k+1} C^\nu = xB^\nu T^{-1} = \left[\lambda^\nu x + \sum_{j=1}^{k} b^{j\nu}\varepsilon^j\right] T^{-1}$$

for certain numbers λ^ν and $b^{j\nu}$. Hence

$$(6.\ 10)\qquad \varepsilon^{k+1} C^\nu = \lambda^\nu x T^{-1} + \sum_{j=1}^{k} b^{j\nu}\varepsilon^j T^{-1} = \lambda^\nu \varepsilon^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} b^{j\nu}\varepsilon^j$$

by (6. 5) and (6. 6). By Lemma 5. 1 follows

$$C^\nu_{k+1,j} = 0 \quad \text{for} \quad j > k+1. \quad \text{Q. E. D.}$$

Since there may be more than one proper vector common to the $B^\nu E^k$, the sequence of $\mathfrak{M}^i$ constructed in the foregoing theorems will vary with the choice of this vector. The theorem which follows now shows that the maximum k for which k-subdiagonalization is possible is independent of this choice.

Theorem 6. 5. *Let the sequence* $\mathfrak{M}^j_{(1)}$ *satisfy the properties* a^j, b^j, c^j *for* $j = 1, \ldots, k$; *let the sequence* $\mathfrak{M}^i_{(2)}$ *satisfy these properties for* $i = 1, \ldots, s$. *Suppose further that* $\mathfrak{M}^{k+1}_{(1)}$ *and* $\mathfrak{M}^{s+1}_{(2)}$ *do not exist* (cf. *Theorem* 6. 1). *Then* $\mathfrak{M}^k_{(1)} = \mathfrak{M}^s_{(2)}$.

Proof. Without loss of generality take $k \geqq s$. If $s = n$, the theorem is trivial. If $s < n$, form the sequence of subspaces

$$(6.\ 12)\qquad \mathfrak{N}^p = \mathfrak{M}^p_{(1)} + \mathfrak{M}^s_{(2)}, \quad p = 0, 1, \ldots, k.$$

Then

$$(6.\ 13)\qquad \dim \mathfrak{N}^0 = s, \quad \dim \mathfrak{N}^p = \begin{cases} \text{either } \dim \mathfrak{N}^{p-1} \\ \text{or } \dim \mathfrak{N}^{p-1} + 1. \end{cases}$$

If $\mathfrak{M}^k_{(1)} \neq \mathfrak{M}^s_{(2)}$, then $\dim \mathfrak{N}^k \geqq s+1$. Thus in the sequence $\mathfrak{N}^p$ at least one member has dimension $s+1$. By (6. 12), any such subspace satisfies a^{s+1}, b^{s+1}, c^{s+1}, contradicting the hypothesis that $\mathfrak{M}^{s+1}_{(2)}$ does not exist. Q. E. D.

Remark 6. 6. The proof of Theorem 6. 4, which exhibits the $(k+1)$-subdiagonalizing matrix, supposes that the matrices A^ν not only can be k-subdiagonalized but in fact already have been reduced to k-subdiagonal form B^ν. However, the condition of Theorem 6.5 is expressed in terms of the properties a^i, b^i, c^i, which refer to the original matrices A^ν. Thus it is possible to determine in advance the greatest k for which k-subdiagonalization is possible, without necessarily carrying out any step in the reduction process.

Theorem 6. 7. *The matrices* A^ν *can be* k-*diagonalized if and only if they have* k *proper vectors in common.*

Proof. Suppose $B^\nu = TA^\nu T^{-1}$ is k-diagonal. By Lemma 5. 1 follows

$$(6.\ 14)\qquad \varepsilon^i B^\nu = B^\nu_{ii}\varepsilon^i,$$

for $i = 1, \ldots, k$. Hence the vectors $\varepsilon^i T$, $i = 1, \ldots, k$, are proper vectors of the A^ν. Conversely let $y^1, \ldots, y^k$ be independent common proper vectors of the A^ν, and let T be a non-singular matrix such that $y^i T^{-1} = \varepsilon^i$, $i = 1, \ldots, k$. Then

$$(6.\ 15)\qquad \varepsilon^i TA^\nu T^{-1} = y^i A^\nu T^{-1} = \lambda^{\nu i} y^i T^{-1} = \lambda^{\nu i}\varepsilon^i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

By Lemma 5. 1 follows

$$(6.\ 16)\qquad B^\nu_{ij} = 0 \text{ if } j \neq i;\ i = 1, \ldots, k.$$

7. *Subdiagonalization in columns.* According to our definition, the 4×4 matrix

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$$

is 2-subdiagonal. We could equally well have phrased a definition according to which

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$$

is 2-subdiagonal. This latter form may be called *k-subdiagonal in columns* to distinguish it from the form we have already discussed, which may be called *k-subdiagonal in rows.* Theorems concerning k-subdiagonalization in columns exactly analogous to those in § 6 for subdiagonalization in rows may be proved by using column vectors instead of row vectors. (Throughout § 6 "vector" stood for "row vector".)

The existence of proper column vectors is in general unrelated to the existence of common proper row vectors. For example, the two matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

have the proper row vector $(0\ 0\ 1)$ in common, but no common proper column vector.

8. *Another special form.* We seek a criterion that a pair of matrices A and B be such that there exists a matrix T yielding

$$A'_{1j} = B'_{1j} = 0 \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{8.1}$$

where

$$A' \equiv TAT^{-1}, \quad B' \equiv TBT^{-1}. \tag{8.2}$$

Theorem 8. 1. *For the form* (8. 1), (8. 2) *it is necessary and sufficient that there exist a row vector x such that*

$$\lambda x A = \mu x B, \quad \lambda \text{ and } \mu \text{ not both zero}, \tag{8.3}$$

(8. 4) *x, if not orthogonal to A, is not a proper vector of A, and similarly for B.*

Proof of necessity. Set $\alpha \equiv (1, 0, \ldots, 0)$. Then

$$\begin{aligned} B'_{1n}\alpha A' = B'_{1n}A'_{1j} &= \begin{cases} 0, & j = 1, \ldots, n-1 \\ B'_{1n}A'_{1n}, & j = n \end{cases} \\ &= A'_{1n}\alpha B', \end{aligned} \tag{8.5}$$

(and if $A'_{1n} = B'_{1n} = 0$, we have $\alpha A' = \alpha B' = 0$). To satisfy (8. 3), put $x = \alpha T$. Also we have $\alpha B' = B'_{1j} = B'_{1n}\beta$ where $\beta \equiv (0, \ldots, 0, 1)$; in other words, $xB = B'_{1n}\beta T$. Similarly $xA = A'_{1n}\beta T$. This establishes (8. 4).

Proof of sufficiency. Case I: x is not orthogonal to B. Then x and xB are linearly independent. Form a non-singular matrix T whose first row is x and whose last row is xB. Then $\alpha T = x$, $\beta T = xB$. Hence defining A' and B' by (8. 2), we get by (8. 3)

$$\lambda \alpha A' = \lambda x A T^{-1} = \mu x B T^{-1} = \mu (x T^{-1})\, B' = \mu \alpha B'. \tag{8.6}$$

Also

$$\alpha B' = x B T^{-1} = \beta. \tag{8.7}$$

(8. 7) asserts $B'_{1j} = \delta_{nj}$. Now if $\mu \neq 0$, then the right hand side of (8. 3) is not zero, implying $\lambda \neq 0$, and hence by (8. 6) $A'_{1j} = \frac{\mu}{\lambda} B'_{1j}$. If $\mu = 0$, then $\lambda \neq 0$, and by (8. 6) $\alpha A' = 0$, implying $A'_{1j} = 0$.

Case II: x is not orthogonal to A. Interchange A and B in Case I.

Case III: x is orthogonal both to A and to B. Let T be any non-singular matrix whose first row is x. Then $\alpha T = x$, and

$$\alpha A' = \alpha T T^{-1} A' = x A T^{-1} = 0. \tag{8. 8}$$

Hence $A'_{1j} = 0$. Similarly $B'_{1j} = 0$. Q. E. D.

Theorem 8. 2. *For the possibility of the form* (8. 1), (8. 2) *it is sufficient that A and B have no common proper vector.*

Proof. There exist numbers λ, μ not both zero such that

$$\det(\lambda A - \mu B) = 0. \tag{8. 9}$$

Suppose, without loss of generality, that $\lambda \neq 0$. We may find a vector $x \neq 0$ such that (8. 3) holds. Now since $\lambda \neq 0$, if x is a proper vector of B, it must be a proper vector of A, which is not possible by hypothesis. Hence (8. 4) holds. The theorem is now a corollary of Theorem 8. 1. Q. E. D.

Corollary 8. 3. *Any pair of matrices can be* 1*-subdiagonalized or put into the form* (8. 1), (8. 2).

Proof. Immediate by Theorems 6. 1 and 8. 2.

Corollary 8. 4. *Any pair of* 2×2 *matrices can be put into at least one of the two forms*

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & 0 \\ e & f \end{pmatrix} \quad or \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & d \\ e & f \end{pmatrix}.$$

Proof. Immediate from Corollary 8. 3 or from Theorem 8. 2 and Corollary 5. 3.

Remark 8. 5. By verbal changes one can state and prove conditions for reduction to a form in which $A'_{j1} = B'_{j1} = 0$ for $j = 1, \ldots, n-1$.

III. Applications to differential systems.

9. *Application of subdiagonalization.* The major applications are self-evident from §§ 2—3. Our method solves by quadratures a vast number of systems previously unsolved, and to exhibit a few special cases would serve but to blunt the point of its generality. We remark further only that if we have a basis solution of a subdiagonalized system, we obtain a basis solution for the original system by applying T^{-1}.

10. *Application of partial diagonalization.* By Theorem 6. 7 we can determine the number of simple modes without actually constructing them. The proof of that theorem exhibits a transformation by which the simple modes may be calculated.

11. *Application of partial subdiagonalization.* The calculation of k integrals by quadratures when $A(t)$ is k-subdiagonal by rows is immediate from the explanation §§ 2—3. If $A(t)$ is k-subdiagonal by columns (§ 7), no such integrals will exist in general. However, the reduced form of (2. 1) is

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \sum_{j=1}^{k} B_{ij}(t)\, y_j + c_i(t), \quad i = 1, \ldots, k, \\ \dot{y}_i &= \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(t)\, y_j + c_i(t), \quad i = k+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{11. 1}$$

where $y = Tx$, $B = TAT^{-1}$, $c = Tb$. That is, the original system of nth order splits into two: one of kth order, and, after the general solution of this one is known, a second of $(n-k)^{\text{th}}$ order.

12. *Application of the results in* § 8. The systems considered are of the special form

$$\dot{x} = [f(t)\,A + g(t)\,B]\,x + b, \tag{12. 1}$$

where A and B are constant matrices. The form (8. 1) (8. 2), with $y = Tx$ and $c = Tb$, reduces the first row in (12. 1) to the form

$$\dot{y}_1 = [f(t)\,A'_{1n} + g(t)\,B'_{1n}]\,y_n + c_1. \tag{12. 2}$$

It thus becomes possible to eliminate y_n, except in the trivial case when $f(t)\,A'_{1n} + g(t)\,B'_{1n} = 0$. The result is a system of second order with $n-1$ members. If $f(t)\,A'_{1n} + g(t)\,B'_{1n} = 0$, we determine y_1 by a quadrature and so reduce the order of the system to $n-1$. In view of Corollary 8. 3, we have at once

Theorem 12. 1. *In any system of the form* (12. 1), *it is always possible to calculate one integral by quadratures or to reduce the system to one of second order with $n-1$ members.*

Corollary 12. 2. *For the second order system*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = [f(t)\,A + g(t)\,B]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}, \tag{12. 2}$$

where A and B are constant matrices, one or both of the following possibilities hold:

1. *The general solution may be obtained by quadratures, or*
2. *The system is equivalent to a single linear differential equation of second order.*

An interesting problem we have been unable to solve is: Given a linear system of the nth order, find necessary and sufficient conditions that it be equivalent to a single linear equation of nth order. The algebraic problem requires simultaneous reduction of the A^ν to forms

$$\begin{pmatrix} 0 & A^\nu_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A^\nu_{23} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A^\nu_{n-1,\,n} \\ A^\nu_{n1} & A^\nu_{n2} & A^\nu_{n3} & \cdots & A^\nu_{nn} \end{pmatrix}$$

and obviously concerns an extremely special case.

Eingegangen 20. September 1955.

Halbgruppen von linearen Operatoren und eine Anwendung in der Approximationstheorie.

Von *P. L. Butzer* aus Montreal, z. Zt. in Mainz.

Einleitung.

Es sei $\{T_t\}$, $t \geqq 0$, eine Menge linearer Operatoren, die einen Banachschen Raum X auf sich selbst abbilden und folgende Forderungen erfüllen:

$$(1) \qquad \begin{gathered} T_0 = I, \ \| T_t \| \leqq M < +\infty, \ t \geqq 0, \\ \lim_{t \to s} \| T_t x - T_s x \| = 0, \ \text{jedes } s \geqq 0, \ x \in X. \end{gathered}$$

Die letzte Bedingung besagt, daß $T_t x$ als Funktion von t stark stetig ist für $t \geqq 0$.

Die Menge $\{T_t\}$ nennt man eine Halbgruppe von Operatoren, wenn

$$(2) \qquad T_{s+t} = T_s T_t \quad s, t \geqq 0$$

gilt. Ist dies der Fall, so hat man mit $A_h = 1/h(T_h - I)$, $h > 0$, für jedes feste $x \in X$

$$(3) \qquad e^{tA_{1/n}} x = \left\{ e^{-tn} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(tn)^\nu}{\nu!} T_{\nu/n} \right\} x, \ 0 \leqq t \leqq +\infty,$$

und ferner ist bekannt, daß für jedes $x \in X$ und $t \geqq 0$

$$\lim_{n \to \infty} \| e^{tA_{1/n}} x - T_t x \| = 0$$

gleichmäßig in jedem endlichen t-Intervall konvergiert. Es gibt mehrere Beweise für diesen Darstellungssatz (z. B. in [2], [3], S. 190 oder, für unseren Fall besonders geeignet, in [4], S. 423).

In dieser Arbeit werden wir hauptsächlich die Operatoren

$$(4) \qquad \{(1-t) I + t T_{1/n}\}^n x, \ 0 \leqq t \leqq 1, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

betrachten, die für den Fall, daß $\{T_t\}$ auch (2) genügt (da dann $T_{1/n}^\nu = T_{\nu/n}$ ist), in der Form

$$(5) \qquad \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} T_{\nu/n} \right\} x, \ 0 \leqq t \leqq 1, \ n = 1, 2, \ldots$$

geschrieben werden können.

Es sei X der Raum aller stetigen Funktionen $x(u)$, die auf dem Intervall $[0, \infty]$ definiert sind, mit der Norm $\| x \| = \max_{0 \leqq u \leqq \infty} | x(u) |$. Wir betrachten jetzt die spezielle Halbgruppe von Rechtstranslationen

$$(T_t x)(u) = x(u+t), \quad u, t \geqq 0.$$

Hier gilt

$$\| T_t \| = 1 \text{ und } \| T_t x - T_s x \| = \max_{0 \leqq u \leqq +\infty} | x(u+t) - x(u+s) | \to 0,$$

weil $x(u)$ im Intervall $[0, \infty]$ gleichmäßig stetig ist.

Wenn jetzt $f(u)$ irgendeine reellwertige stetige und auf dem Intervall $[0, 1]$ definierte Funktion ist, so kann diese auf das unendliche Intervall fortgesetzt werden, indem man

$$f^*(u) = \begin{cases} f(u) & \text{für } 0 \leqq u \leqq 1 \\ f(1) & \text{für } 1 < u < +\infty \end{cases}$$

setzt. Im Falle dieser speziellen Halbgruppe geht der Operator (5), wenn man noch $x = f^*$ und $u = 0$ setzt, in

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} f\left(\frac{\nu}{n}\right), \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$

d. h. in das Bernsteinsche Polynom n-ter Ordnung der Funktion f im Intervall $[0, 1]$ über. Unsere Resultate werden dadurch zu Aussagen über Eigenschaften der Bernsteinschen Polynome.

Schließlich werden wir den Grad der Konvergenz des Operators (3) gegen $T_t x$, falls $T_t x$ eine Lipschitzbedingung erfüllt, diskutieren.

2. Ein allgemeiner Konvergenzsatz.

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir teilen das Intervall $[0, 1]$ in n gleiche Teile und stellen zu jedem Punkt $\frac{\nu}{n}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, eine reelle Funktion $\varphi_{\nu,n}(t) \geqq 0$, definiert für $0 \leqq t \leqq 1$, auf. Wir betrachten jetzt nur unter der Voraussetzung (1) (nicht also (2)) den Operator

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n}\right\} x.$$

Dann möchten wir notwendige und hinreichende Bedingungen für das System $\{\varphi_{\nu,n}\}$ so finden, daß für jedes bestimmte $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left\{\sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n}\right\} x - T_t x \right\| = 0 \tag{6}$$

gleichmäßig für t im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ gilt.

Satz 2. 1. *Es sei $\{T_t\}$ eine Menge von Operatoren, die nur* (1) *genügen. Notwendig und hinreichende Bedingungen dafür, daß für das System $\{\varphi_{\nu,n}\}$ und jedes feste $x \in X$ die Relation* (6) *gleichmäßig für t im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ gilt, sind die beiden Gleichungen*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{|\nu/n - t| \leqq \delta} \varphi_{\nu,n}(t) = 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{|\nu/n - t| > \delta} \varphi_{\nu,n}(t) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

die für jedes $\delta > 0$ und gleichmäßig für $0 \leqq t \leqq 1$ gelten müssen. Damit äquivalent sind folgende Bedingungen:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu,n}(t) = 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right) \varphi_{\nu,n}(t) = t, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 \varphi_{\nu,n}(t) = t^2, \end{cases} \tag{8}$$

die gleichmäßig für $0 \leqq t \leqq 1$ bestehen müssen.

Beweis. Es sei (7) erfüllt. Da T_t stark stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$, so daß $\| T_t x - T_s x \| \leqq \varepsilon \| x \|$ ist für $| t - s | < \delta$, $0 \leqq t, s \leqq 1$. Nach (1) hat man ferner $\| T_t \| \leqq M$, $0 \leqq t \leqq 1$. Folglich ist für $0 \leqq t \leqq 1$ und jedes $x \in X$

$$\begin{aligned}
&\left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| \\
&= \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x - \left\{ \sum_{|\nu/n - t| < \delta} \varphi_{\nu,n}(t)\, T_t \right\} x - \left\{ 1 - \sum_{|\nu/n - t| < \delta} \varphi_{\nu,n}(t) \right\} T_t x \right\| \\
&\leqq \left\| \left\{ \sum_{|\nu/n - t| < \delta} \varphi_{\nu,n}(t) (T_{\nu/n} - T_t) \right\} x + \left\| \left\{ \sum_{|\nu/n - t| \geqq \delta} \varphi_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x \right\| \right. \\
&\qquad + \left\| \left\{ 1 - \sum_{|\nu/n - t| < \delta} \varphi_{\nu/n}(t) \right\} T_t x \right\| \\
&\leqq \varepsilon \| x \| \sum_{|\nu/n - t| < \delta} \varphi_{\nu,n}(t) + M \sum_{|\nu/n - t| \geqq \delta} \varphi_{\nu,n}(t) \| x \| \\
&\qquad + M \Big(1 - \sum_{|\nu/n - t| < \delta} \varphi_{\nu,n}(t)\Big) \| x \| \\
&\leqq \varepsilon \| x \| + M \| x \| \varepsilon + M \| x \| \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq n_0 = n_0(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Das heißt, (6) gilt gleichmäßig in $0 \leqq t \leqq 1$; die Bedingung (7) ist also hinreichend.

Nun sei (7) erfüllt; dann gilt allgemein die Beziehung (6). Insbesondere gilt sie also für eine Halbgruppe, die durch gewisse Rechtstranslationen erzeugt ist. Bei diesen Rechtstranslationen soll es sich nur um diejenigen handeln, die man, wie in der Einleitung angegeben, aus den reellwertigen stetigen Funktionen $f(u) = 1$, $f(u) = u$, $f(u) = u^2$ gewinnt, wenn man $x = f^*$ und danach $u = 0$ setzt. Das ergibt insbesondere die Bedingungen (8), die gleichmäßig für $0 \leqq t \leqq 1$ gelten; also sind die Bedingungen (8) auch notwendig.

Jetzt nehmen wir an, daß (8) erfüllt ist, dann folgt für $n \to \infty$

$$t^2 \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu,n}(t) - 2t \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right) \varphi_{\nu,n}(t) + \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 \varphi_{\nu,n}(t) \to t^2 - 2t^2 + t^2 = 0.$$

Andererseits ist der links stehende Ausdruck gleich

$$\sum_{\nu=0}^{n} [t^2 - 2t(\nu/n) + (\nu/n)^2]\, \varphi_{\nu,n}(t) \geqq \delta^2 \sum_{|\nu/n - t| \geqq \delta} \varphi_{\nu,n}(t),$$

woraus jetzt

$$\sum_{|\nu/n - t| \geqq \delta} \varphi_{\nu,n}(t) \to 0$$

folgt. Da auf Grund von (8) andererseits

$$\sum_{|\nu/n - t| \geqq \delta} \varphi_{\nu,n}(t) + \sum_{|\nu/n - t| < \delta} \varphi_{\nu,n}(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu,n}(t) \to 1$$

gilt, folgt insgesamt

$$\sum_{|\nu/n - t| < \delta} \varphi_{\nu,n}(t) \to 1.$$

Das bedeutet aber gerade, daß mit (8) auch (7) erfüllt ist. Unser Satz ist nun bewiesen.

Wählt man insbesondere für $\varphi_{\nu,n}(t)$ die spezielle Funktion $p_{\nu,n}(t) = \binom{\nu}{n} t^\nu (1-t)^{n-\nu}$, so erfüllt diese die Bedingung (7). Es ist nämlich

$$\sum_{|\nu/n - t| \geqq \delta} p_{\nu,n}(t) \leqq \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu - nt)^2\, p_{\nu,n}(t) = \frac{nt(1-t)}{n^2 \delta^2} \leqq \frac{1}{4n\delta^2};$$

daraus folgt:

$$\sum_{|\nu/n - t| \geqq \delta} p_{\nu,n}(t) < \varepsilon, \quad \text{falls} \quad n > \frac{1}{4\,\varepsilon\delta^2}. \tag{9}$$

Auf Grund der Gültigkeit von $\sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t) = 1$, folgt

$$\sum_{|\nu/n - t| < \delta} p_{\nu,n}(t) > 1 - \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq n_0. \tag{10}$$

Man kann ebenso leicht zeigen, daß für diese Wahl von $\varphi_{\nu,n}(t)$ die äquivalenten Bedingungen (8) erfüllt sind. Wir bemerken, daß ein entsprechender Satz im Fall, daß $T_t x$ eine stetige Funktion $f(t)$ ist, in der Arbeit von Bohman [1] enthalten ist.

Wir geben noch folgende Anwendung von Satz 2. 1:

Folgerung 2. 1. *Wenn $\{T_t\}$ eine einparametrige Schar von beschränkten linearen Operatoren ist, die* (1) *genügen, so gilt für jedes $x \in X$*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| = 0$$

gleichmäßig für $0 \leqq t \leqq 1$.

Spezialisieren wir die Schar $\{T_t\}$ und den Raum X wie vorher angegeben, so erhalten wir einen Beweis des Weierstrassschen Approximationssatzes mit Hilfe der Bernsteinschen Polynome.

Man kann diese Folgerung auch direkt beweisen, indem man die Summe $\sum_{\nu=0}^{n}$ in zwei Teile zerlegt, die den Werten von ν entsprechen, für welche $|\nu - nt| < \delta n$ bzw. $|\nu - nt| \geqq \delta n$ gilt, und dann die Abschätzungen (9) und (10) benutzt; diese Methode ist der von Hille [4] ähnlich. Wir bemerken noch, daß die obige Folgerung für den Operator (4), falls $\{T_t\}$ auch (2) genügt, durch Kendall [5] bewiesen wurde und zwar mit Hilfe einer Methode, die sich nicht wesentlich von der von Dunford und Segal [2] unterscheidet.

3. Annäherungssätze.

Satz 3. 1. *Falls $\{T_t\}$ eine Schar von Operatoren ist, die* (1) *genügen und falls $T_t x$ (als Funktion von t) einen Stetigkeitsmodul $\mu(\delta; x)$ im Intervall* $[0, 1]$ *besitzt, d. h.*

$$\mu(\delta; x) = \sup_{\substack{|t-s| < \delta \\ 0 \leqq t,\, s \leqq 1}} \| T_t x - T_s x \|, \quad x \in X,$$

so gilt für jedes $x \in X$

$$\left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| \leqq 3/2\ \mu(1/\sqrt{n}; x).$$

Beweis. Für jede reelle Zahl $\lambda > 0$ hat man

$$\mu(\lambda\delta; x) \leqq (\lambda + 1)\, \mu(\delta; x),$$

also

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| &\leqq \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t) \| T_{\nu/n} - T_t) x \| \\ &\leqq \sum_{\nu=0}^{n} \mu\left(\left| \frac{\nu}{n} - t \right|; x \right) p_{\nu,n}(t) \leqq \mu(1/\sqrt{n}; x) \left\{ \sqrt{n} \sum_{\nu=0}^{n} \left| \frac{\nu}{n} - t \right| p_{\nu,n}(t) + 1 \right\} \\ &\leqq \mu(1/\sqrt{n}; x)\, \{1/2 + 1\} = 3/2\ \mu(1/\sqrt{n}; x), \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung wegen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left| \frac{\nu}{n} - t \right| p_{\nu,n}(t) \leqq \left[\sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n} - t \right)^2 p_{\nu,n}(t) \right]^{1/2} \leqq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

gilt.

Wir bemerken, daß im allgemeinen 3/2 nicht die „beste" Konstante ist. Offensichtlich erhält man

Folgerung 3. 1. *Es sei $\{T_t\}$ eine Menge von Operatoren, die (1) genügen, und $T_t x$ (als Funktion von t) genüge einer Lipschitzbedingung der Ordnung γ, $0 < \gamma \leqq 1$, d. h. zu jedem $x \in X$ gebe es ein endliches $C(x)$, so daß*

$$\| T_t x - T_s x \| \leqq C(x) \, | t - s |^{\gamma}, \quad 0 \leqq t, s \leqq 1$$

ist. Dann gilt

$$\left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t) \, T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| = O(n^{-\gamma/2}).$$

Als ein Komplement zur Folgerung 3. 1 für $\gamma = 1$ haben wir

Satz 3. 2. *Falls $\{T_t\}$ eine Schar von Operatoren ist, die (1) genügen, und falls die starke Ableitung $T_t' x$ (als Funktion von t) im Punkte t in $[0, 1]$ existiert, so gilt für jedes $x \in X$*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t) \, T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| = 0.$$

Beweis. Da die erste Ableitung im Punkte t existiert, kann man

$$T_{\nu/n} x = T_t x + \left(\frac{\nu}{n} - t \right) \left[T_t' x + \eta \left(\frac{\nu}{n} - t \right) x \right]$$

schreiben, wobei $\| \eta(h) \| < \varepsilon$ ist für $| h | < \delta$ und $\| \eta(h) \| \leqq M$ für alle h. Also folgt

$$\begin{aligned} &\left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t) \, T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| \\ &\quad = \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n} - t \right) p_{\nu,n}(t) \, T_t' \right\} x + \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n} - t \right) p_{\nu,n}(t) \, \eta \left(\frac{\nu}{n} - t \right) \right\} x \right\| \\ &\quad \leqq \varepsilon \, \| x \| \sum_{|\nu/n - t| < \delta} \left| \frac{\nu}{n} - t \right| p_{\nu,n}(t) + M \, \| x \| \sum_{|\nu/n - t| \geqq \delta} p_{\nu,n}(t), \end{aligned}$$

und da es zu jedem $\delta = n^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$, eine Konstante $C = C(\alpha, k)$ gibt, so daß

$$\sum_{|\nu/n - t| \geqq \delta} p_{\nu,n}(t) \leqq C n^{-k}, \quad \text{für jedes } k > 0 \quad \text{(siehe [6] S. 15)}$$

gilt, erhält man, daß der in der vorletzten Ungleichung rechts stehende Ausdruck nicht größer ist als

$$\frac{\varepsilon \, \| x \|}{2\sqrt{n}} + \frac{CM \, \| x \|}{n} < \frac{\varepsilon \, \| x \|}{\sqrt{n}} \quad \text{für } n \geqq n_0.$$

Unser Satz ist also bewiesen.

Man kann auch leicht den folgenden Satz beweisen:

Satz 3. 3. *Wenn $\{T_t\}$ eine Schar von Operatoren ist, die (1) genügen, und falls die starke Ableitung $T_t' x$ der Lipschitzbedingung der Ordnung (1) genügt, so gilt für jedes $x \in X$*

$$\left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t) \, T_{\nu/n} \right\} x - T_t x \right\| = O(1/n).$$

Der Grad der Approximation kann, falls sogar die zweite Ableitung von T_t existiert, nicht verbessert werden; dies besagt

Satz 3. 4. *Falls $\{T_t\}$ eine Schar von Operatoren ist, die (1) genügen, und falls die zweite starke Ableitung $T''x$ im Punkte t, $0 \leqq t \leqq 1$, existiert, so gilt für jedes $x \in X$*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| n\left[\left\{\sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n}\right\} x - T_t x\right] - \frac{t(1-t)}{2}\, T_t'' x \right\| = 0.$$

Beweis. Wir benutzen die Beziehung

$$T_{\nu/n} x = T_t x + \left(\frac{\nu}{n} - t\right) T_t' x + \left(\frac{\nu}{n} - t\right)^2 \left[\, T_t'' x + \eta\left(\frac{\nu}{n} - t\right) x\right],$$

wobei $\| \eta(h) \| < \varepsilon$ für $| h | < \delta$ und $\| \eta(h) \| \leqq M$ für alle h; gehen wir wie oben vor, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left\| \left\{\sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n}\right\} x - T_t x - \frac{t(1-t)}{2n}\, T_t'' x \right\| \\ &\leqq \frac{\varepsilon \| x \|}{n^2} \sum_{|\nu/n - t| < \delta} (\nu - nt)^2\, p_{\nu,n}(t) + M \| x \| \sum_{|\nu/n - t| \geqq \delta} p_{\nu,n}(t) \\ &\leqq \frac{\varepsilon \| x \|}{4n} + M \| x \|\, C/n^2 < 2\varepsilon \| x \| / n \quad \text{für} \quad n \geqq n_0. \end{aligned}$$

4. Integral und Ableitung des Operators (5).

Satz 4. 1. *Wenn $T_t x$ als Funktion von t von 0 bis 1 im Sinne von Riemann-Graves abstrakt integrierbar ist, so gilt für jedes $x \in X$:*

$$\left\| \int_0^1 \left\{\sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n}\right\} x\, dt - \int_0^1 T_t x\, dt \right\| \to 0 \quad \textit{mit} \quad n \to \infty.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{\sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n}\right\} x\, dt &= \left\{\sum_{\nu=0}^{n} \int_0^1 p_{\nu,n}(t)\, dt\, T_{\nu/n}\right\} x \\ &= \left\{1/(n+1) \sum_{\nu=0}^{n} T_{\nu/n}\right\} x \xrightarrow{\text{stark}} \int_0^1 T_t x\, dt, \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Satz 4. 2. *Falls $\{T_t\}$ eine Schar von stark stetigen Operatoren mit dem Stetigkeitsmodul $\mu(\delta; x)$ im Intervall $[0, 1]$ ist so gilt für $x \in X$:*

$$\left\| \int_0^1 \left\{\sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n}\right\} x\, dt - \int_0^1 T_t x\, dt \right\| \leqq \mu\big(1/(n+1); x\big). \tag{11}$$

Beweis. Offensichtlich ist $T_t x$ integrierbar im Sinne von Bochner (da $T_t x$ stark stetig ist, $\| T_t \| \leqq M$, $0 \leqq t \leqq 1$, und $T_t x$ stark meßbar ist). Auch haben wir für jedes $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\| (T_t - T_{\nu/n})\, x \| \leqq \mu\big(1/(n+1); x\big) \text{ in } \nu/(n+1) \leqq t \leqq (\nu+1)/(n+1),$$

also

$$\left\| \int_0^1 T_t x\, dt - \int_0^1 \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x\, dt \right\| = \left\| \int_0^1 \left[T_t x - 1/(n+1) \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} T_{\nu/n} \right\} x \right] dt \right\|$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^{n} \left\| \int_{\nu/(n+1)}^{(\nu+1)/(n+1)} \left[T_t x - T_{\nu/n} \right] x\, dt \right\| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \int_{\nu/(n+1)}^{(\nu+1)/(n+1)} \mu(1/(n+1); x)\, dt = \mu(1/(n+1); x),$$

was zu beweisen war.

Wir bemerken, daß, wenn $T_t x$ eine starke totale Variation $V(t; x)$ für jedes $x \in X$ und für $0 \leqq t \leqq 1$ besitzt, wir $\mu(1/(n+1); x)$ auf der rechten Seite von (11) durch $V(t; x)/(n+1)$ ersetzen können.

Die Anwendung der Sätze 3. 2, 4. 1 und 4. 2 auf Bernsteinsche Polynome scheinen neu zu sein.

Jetzt betrachten wir die Konvergenz der Ableitung des Operators (5) gegen die Ableitung von $T_t x$.

Satz 4. 3. *Wenn $T_t x$ stark differenzierbar und die Ableitung $T'_t x$ stark stetig für alle t aus $[0, 1]$ ist, so folgt*

$$\left\| \left\{ \frac{d}{dt} \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x - \frac{d}{dt} T_t x \right\| \to 0$$

gleichmäßig für t in $[0, 1]$.

Beweis. Wir haben

$$\left\{ \frac{d}{dt} \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x = \left\{ n \sum_{\nu=0}^{n-1} p_{\nu,n-1}(t) \left[T_{(\nu+1)/n} - T_{\nu/n} \right] \right\} x.$$

Da $T_t x$ im ganzen Segment stark differenzierbar ist, folgt nach dem Mittelwertsatz

$$n(T_{(\nu+1)/n} - T_{\nu/n})\, x = T'_{\vartheta_{\nu,n}} x \quad \text{mit} \quad \frac{\nu}{n} < \vartheta_{\nu,n} < \frac{\nu+1}{n}$$

also

$$\left\| \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu,n}(t)\, T_{\nu/n} \right\} x - \frac{d}{dt} T_t x \right\| = \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} p_{\nu,n-1}(t)\, T'_{\vartheta_{\nu,n}} \right\} x - T'_t x \right\|$$

$$\leqq \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} p_{\nu,n-1}(t)\, T'_{\vartheta_{\nu,n}} \right\} x - \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} p_{\nu,n-1}(t)\, T'_{\nu/n} \right\} x \right\|$$

$$+ \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} p_{\nu,n-1}(t)\, T'_{\nu/n} \right\} x - T'_t x \right\|$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

wo $\Sigma_1 \to 0$ gleichmäßig für t, da $T'_t x$ stark stetig ist, und $\Sigma_2 \to 0$ gleichmäßig wegen Folgerung 2. 1.

Wir bemerken: Falls $\{T_t\}$ auch die Bedingungen (2) erfüllt, gilt jeder von den Sätzen in § 3 und § 4 nicht nur für den Operator (5), sondern auch für den Operator (4).

5. Der Näherungsgrad bezüglich Hilles „First Exponential Formula".

Viele der Resultate, die wir für den Operator (5) gefunden haben, gelten auch für den Operator (3), wenn verschiedene Modifikationen eingeführt werden. Zum Beispiel:

Satz 5. 1. *Falls $\{T_t\}$ eine Schar von Operatoren ist, die die Bedingungen* (1) *und* (2) *erfüllen und $T_t x$ der Lipschitzbedingung $\| T_t x - T_s x \| \leqq C(x) \, | t - s |^\gamma$, $0 < \gamma \leqq 1$, $0 \leqq t, s \leqq \beta$, für jedes $x \in X$ genügt, so gilt*

$$\| T_t x - e^{tA_{1/n}} x \| \leqq M n^{-\gamma/2},$$

für $0 \leqq t \leqq \beta$, mit $M = M(C, \beta)$.

Beweis. Im Falle $\gamma = 1$ haben wir:

$$\begin{aligned} \| T_t x - e^{tA_{1/n}} x \| &= \left\| e^{-tn} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (tn)^\nu [T_t - T_{\nu/n}] x \right\| \\ &\leqq e^{-nt} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (tn)^\nu \| [T_t - T_{\nu/n}] x \| \\ &< e^{-nt} C(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (tn)^\nu \left| t - \frac{\nu}{n} \right|, \end{aligned}$$

und da es bekannt ist, daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} | \nu - nt | \frac{(tn)^\nu}{\nu!} \leqq \sqrt{tn} \, e^{nt}$$

ist, ist der letzte Ausdruck kleiner oder gleich

$$C(x) \frac{\sqrt{tn}}{n} < C(x) \sqrt{\frac{\beta}{n}}.$$

Falls $\gamma < 1$ ist, so gibt die Höldersche Ungleichung

$$\begin{aligned} e^{-nt} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(tn)^\nu}{\nu!} \| [T_t - T_{\nu/n}] x \| &= e^{-nt} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu!)^{1-\gamma}} (tn)^{\nu(1-\gamma)} \frac{(tn)^{\nu\gamma}}{(\nu!)^\gamma} \| (T_t - T_{\nu/n}) x \| \\ &\leqq e^{-nt} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (tn)^\nu \right]^{1-\gamma} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (tn)^\nu \| (T_t - T_{\nu/n}) x \|^{1/\gamma} \right]^\gamma \\ &= e^{-nt} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (tn)^\nu \| (T_t - T_{\nu/n}) x \|^{1/\gamma} \right]^\gamma \\ &= e^{-nt\gamma} C(x) \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (tn)^\nu \left| t - \frac{\nu}{n} \right| \right]^\gamma \\ &\leqq e^{-nt\gamma} C(x) \left[\frac{\sqrt{tn} \, e^{nt}}{n} \right]^\gamma < C(x) \frac{\beta^{\gamma/2}}{n^{\gamma/2}}. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Es ist vielleicht bemerkenswert zu zeigen, daß man, falls $T_t x$ eine Lipschitz-Bedingung vom Typ

$$\| T_t x - T_s x \| \leqq C(x) \frac{| t - s |^\gamma}{(t + s)^{\gamma/2}}, \quad 0 < \gamma \leqq 1, \; 0 < t, \; s < \infty, \tag{12}$$

erfüllt, wobei $C(x)$ für jedes $x \in X$ endlich ist, ein Analogon von Satz 5. 1 beweisen kann, das nicht nur für jedes endliche Intervall $[0, \beta]$, sondern auch für das unendliche Intervall $(0, \infty)$ gilt, nämlich

Satz 5. 2. *Falls $\{T_t\}$ eine Schar von Operatoren ist, die* (1) *und* (2) *erfüllen und ferner der Bedingung* (12) *genügen, so gilt*

$$\| T_t x - e^{tA_{1/n}} x \| \leqq C(x)\, n^{-\gamma/2},$$

für $0 < t < +\infty$.

Beweis. Im Falle $\gamma < 1$ gehen wir wie oben vor und erhalten:

$$e^{-nt\gamma}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(tn)^{\nu}\left\|\left[T_t - T_{\nu/n}\right]x\right\|^{1/\gamma}\right\}^{\gamma}$$

$$\leqq e^{-nt\gamma}C(x)\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(tn)^{\nu}\frac{\left|\frac{\nu}{n}-t\right|}{\left(\frac{\nu}{n}+t\right)^{1/2}}\right]^{\gamma}$$

$$< e^{-nt\gamma}C(x)\frac{(nt)^{\gamma/2}}{t^{\gamma/2}}\frac{e^{nt\gamma}}{n^{\gamma}} = C(x)\, n^{-\gamma/2}.$$

Der Beweis für $\gamma = 1$ verläuft ähnlich.

Es sei X der Raum der reellwertigen stetigen Funktionen $x(u)$, die auf $[0, \infty]$ definiert sind mit der Norm $\| x \| = \max\limits_{0 \leqq u \leqq +\infty} | x(u) |$ und $(T_t x)(u) \equiv x(u+t)$, $u, t \geqq 0$. Der Operator (3) mit $x = f$ und $u = 0$ geht in

$$e^{-nt}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(tn)^{\nu} f\left(\frac{\nu}{n}\right)$$

über; dies ist eine Transformation, die für einen konstruktiven Beweis des Weierstrassschen Satzes für das unendliche Intervall brauchbar ist.

Literaturverzeichnis.

[1] *H. Bohman*, On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Math. **2**, 43—56 (1952).

[2] *N. Dunford* und *I. E. Segal*, Semi-groups of operators and the Weierstrass theorem; Bull. Americ. Math. Soc. **52**, 911—914 (1946).

[3] *E. Hille*, Functional Analysis and semi-groups. Americ. Math. Soc. Coll. Publ. XXXI, New York 1948.

[4] *E. Hille*, On the analytical theory of semi-groups. Proc. Nat. Acad. Sci. **28**, 421—424 (1942).

[5] *D. G. Kendall*, Bernstein polynomials and semi-groups of operators. Math. Scand. **2**, 185—186 (1954).

[6] *G. G. Lorentz*, Bernstein polynomials, Toronto 1953.

Eingegangen 12. Dezember 1955.

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung in der ebenen hyperbolischen Geometrie.

Herrn Professor Dr. Wilhelm Süß zum 60. Geburtstage gewidmet.

Von *Kuno Fladt* in Calw (Württ. Schwarzwald).

Einleitung.

In den gebräuchlichen Lehrbüchern der nichteuklidischen Geometrie[1]) ist mehr oder weniger ausführlich auch von den Kegelschnitten und ihren Eigenschaften die Rede. Der Leser erfährt, daß es z. B. in der hyperbolischen Geometrie viel mehr Arten gibt als in der euklidischen, daß sie wirklich „Kegelschnitte" sind, wobei es wiederum viel mehr Arten von Kegeln (und Zylindern) gibt als in der euklidischen Geometrie. Eine ziemlich vollständige (aber von vielen Mängeln und Fehlern entstellte) Diskussion der allgemeinen Kegelschnittsgleichung ist nur in dem Buche von P. Barbarin, *Études de la géométrie analytique noneuclidienne*, Bruxelles 1901, Mém. cour. sav. étr. Acad. 60, zu finden.

Vom höheren Standpunkt aus ist eine solche mittels der Theorie der Elementarteiler leicht zu geben: Es ist nur das durch die linke Seite der Kegelschnittsgleichung

$$(1)\quad f(x) \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k \equiv a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 = 0$$

und die linke Seite der Gleichung des absoluten Kegelschnitts

$$(2)\qquad x \mid x \equiv \varkappa (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2$$

dargestellte Paar quadratischer Formen zu klassifizieren.

Aber wirkliche Geometrie erfordert doch wohl eine andere, *geometrische* und *elementare* Methode. Eine solche sei hier dargelegt. Wir nennen sie *elementar*, weil sie von der Elementarteilertheorie unabhängig ist und die allgemeine Kegelschnittsgleichung auf elementargeometrischem Wege, vermöge einer Drehung und höchstens zweier Schiebungen, auf eine Normalform zu bringen erlaubt, welche die Art der Kegelschnitte mit wenig elementarer Rechnung zu erkennen gestattet.

§ 1. Eine Normalform der Kegelschnittsgleichung.

1. Wir versuchen, die Gleichung (1) durch eine nichteuklidische Bewegung, d. h. eine automorphe Kollineation des absoluten Kegelschnittes (AK) (2) auf eine einfachere Form zu bringen. Als eine solche *Normalform*, die es gestattet, ohne viel Mühe die *Art* des Kegelschnittes zu bestimmen, eignet sich besonders diejenige, bei der die Koeffizienten

---

[1]) Eine Auswahl solcher ist:

1. *H. Liebmann*, Nichteuklidische Geometrie. Leipzig 1. Aufl. 1905, 2. Aufl. 1912, 3. Aufl. 1923.
2. *J. L. Coolidge*, The elements of non euclidean geometry, Oxford 1909.
3. *D. M. Y. Sommerville*, The elements of non euclidean geometry, London 1914.
4. *H. M. Coxeter*, Non-euclidean geometry, Toronto 1947.

a_{31} und a_{12} beide verschwinden, so daß die Gerade $x_1 = 0$ Symmetrieachse ist. Das bedeutet, daß $x_1 = 0$ die Polare des Punktes $(1 \mid 0 \mid 0)$ sowohl in bezug auf den gegebenen als den AK ist. Die Hauptfrage ist dann allerdings, ob die gewünschte Normalform stets hergestellt werden kann.

Wir wollen die Bewegung zusammensetzen aus einer *Drehung* des Koordinatensystems um den Ursprung $(0 \mid 0 \mid 1)$ mit dem Winkel φ mit den Gleichungen

$$\varrho x_1 = \breve{x}_1 \cos\varphi - \breve{x}_2 \sin\varphi, \quad \varrho x_2 = \breve{x}_1 \sin\varphi + \breve{x}_2 \cos\varphi, \quad \varrho x_3 = \breve{x}_3 \tag{3}$$

und einer *Schiebung* längs der neuen Achse $\bar{x}_2 = 0$ um die Strecke t mit den Gleichungen

$$\varrho \breve{x}_1 = \bar{x}_1 C(t) - \bar{x}_3 S(t), \quad \varrho \breve{x}_2 = \bar{x}_2, \quad \varrho \breve{x}_3 = \varkappa \bar{x}_1 S(t) + \bar{x}_3 C(t)^{2)}. \tag{4}$$

Die Bewegungen (3) und (4) ergeben zusammengesetzt die Bewegung

$$\begin{cases} \varrho x_1 = x_1 C(t) \cos\varphi - \bar{x}_2 \sin\varphi - \bar{x}_3 S(t) \cos\varphi \\ \varrho x_2 = \bar{x}_1 C(t) \sin\varphi + \bar{x}_2 \cos\varphi - \bar{x}_3 S(t) \sin\varphi \\ \varrho x_3 = \varkappa \bar{x}_1 S(t) \qquad\qquad\qquad + \bar{x}_3 C(t). \end{cases} \tag{5}$$

Die Achse $\bar{x}_1 = 0$ hat in den ursprünglichen Koordinaten $(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & -\sin\varphi & -S(t)\cos\varphi \\ x_2 & \cos\varphi & -S(t)\sin\varphi \\ x_3 & 0 & C(t) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x_1 C(t) \cos\varphi + x_2 C(t) \sin\varphi + x_3 S(t) = 0 \tag{6}$$

und ihr absoluter Pol ist

$$\big(C(t)\cos\varphi \mid C(t)\sin\varphi \mid \varkappa S(t)\big). \tag{7}$$

Dieser Pol muß *gemeinsamer* Pol in bezug auf den AK und den gegebenen Kegelschnitt sein. Ist y ein solcher, $[\varkappa y_1 \mid \varkappa y_2 \mid y_3]$ seine absolute Polare $[f_1'(y) \mid f_2'(y) \mid f_3'(y)]$ seine Polare in bezug auf den Kegelschnitt (1), so muß

$$\varrho \varkappa y_1 = f_1'(y), \quad \varrho \varkappa y_2 = f_2'(y), \quad \varrho y_3 = f_3'(y) \tag{8}$$

sein. Daraus folgt für ϱ die sog. *charakteristische Gleichung*

$$\Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa\varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varkappa\varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

oder

$$\begin{aligned} -\varkappa\Delta(\varrho) \equiv (\varkappa\varrho)^3 - \{a_{11} + a_{22} + \varkappa a_{33}\}(\varkappa\varrho)^2 \\ + \{\varkappa(A_{11} + A_{22}) + A_{33}\}(\varkappa\varrho) - \varkappa a = 0. \end{aligned} \tag{9'}$$

Es ist zweckmäßig, die Glieder der Determinante (9) mit b_{ik}, sie selbst mit b zu bezeichnen, so daß

$$\Delta(\varrho) \equiv b \equiv \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{9''}$$

ist.

---

[2]) Die Funktionen $C(t)$ und $S(t)$, für welche $C^2(t) + \varkappa S^2(t) = 1$ gilt, sind für $\varkappa = -1$ die hyperbolischen Funktionen $\cosh t$ und $\sinh t$, für $\varkappa = +1$ die Kreisfunktionen $\cos t$ und $\sin t$. Wir setzen $\frac{S(t)}{C(t)} = T(t)$, $\frac{C(t)}{S(t)} = Ct(t)$. Für $\varkappa \neq -1$ ist $S(t) = \frac{\sinh(\sqrt{-\varkappa}t)}{\sqrt{-\varkappa}}$, $C(t) = \cosh(\sqrt{-\varkappa}t)$, $T(t) = \frac{\operatorname{tangh}(\sqrt{-\varkappa}t)}{\sqrt{-\varkappa}}$.

Ist B_{ik} der zu b_{ik} gehörige algebraische Minor in b, β_{ik} der zu B_{ik} in der Determinante $|B_{ik}| = b^2$, so ist $\beta_{ik} = b \cdot b_{ik} = 0$, also z. B.

$$B_{13}^2 = B_{11} B_{33}, \quad B_{23}^2 = B_{22} B_{33}. \tag{10}$$

Weiter wird

$$\Delta'(\varrho) = -\{\varkappa(B_{11} + B_{22}) + B_{33}\}, \quad \Delta''(\varrho) = 2\varkappa\{b_{11} + b_{22} + \varkappa b_{33}\}. \tag{11}$$

Aus (8) oder

$$\begin{cases} (a_{11} - \varkappa\varrho_1)\, y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 = 0 \\ a_{21} y_1 + (a_{22} - \varkappa\varrho_2)\, y_2 + a_{23} y_3 = 0 \\ a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + (a_{33} - \varrho)\, y_3 \quad = 0 \end{cases}$$

folgt nun z. B.

$$y_1 : y_2 : y_3 = B_{13} : B_{23} : B_{33}. \tag{12}$$

Nun hat die Gleichung (9) mindestens *eine* reelle Wurzel, sie kann aber auch deren drei besitzen. Wir wollen diejenige unter ihnen, die dem Pol (7) entspricht und im Falle *einer* reellen Wurzel diese sein muß, mit ϱ_1 bezeichnen. B_{13}, B_{23}, B_{33} seien dann die zu $\varrho = \varrho_1$ gehörigen Werte der Minoren. Dann gilt

$$C(t) \sin\varphi : C(t) \cos\varphi : \varkappa S(t) = B_{13} : B_{23} : B_{33}. \tag{13}$$

Daraus folgt sofort

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{B_{23}}{B_{13}} \tag{14}$$

oder mit (10)

$$\operatorname{tang}\varphi = \varepsilon \sqrt{\frac{B_{22}}{B_{11}}}, \tag{14'}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ das Vorzeichen von $\dfrac{B_{23}}{B_{13}}$ ist. Weiter sei, um für φ keinen überstumpfen Winkel zu erhalten,

$$\cos\varphi = \varepsilon \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{11} + B_{22}}}, \quad \sin\varphi = \sqrt{\frac{B_{22}}{B_{11} + B_{22}}}. \tag{14''}$$

Dann folgt weiter aus (13)

$$T(t) = \frac{1}{\varkappa} \cos\varphi \frac{B_{33}}{B_{31}} = \frac{\varepsilon\zeta}{\varkappa} \sqrt{\frac{B_{33}}{B_{11} + B_{22}}}, \tag{15}$$

wo $\zeta = \pm 1$ das Vorzeichen von $\dfrac{B_{33}}{B_{31}}$ ist, und weiter

$$C(t) = \sqrt{\frac{\varkappa(B_{11} + B_{22})}{\varkappa(B_{11} + B_{22}) + B_{33}}}, \quad S(t) = \frac{\varepsilon\zeta}{\varkappa} \sqrt{\frac{\varkappa B_{33}}{\varkappa(B_{11} + B_{22}) + B_{33}}}. \tag{15'}$$

§ 2. Die Möglichkeit der Normalform für $\varkappa < 0$.

2. Der Winkel φ ist stets reell, t nur, wenn

$$\operatorname{tangh}^2(\sqrt{-\varkappa}\, t) = -\frac{1}{\varkappa} \frac{B_{33}}{B_{11} + B_{22}} < 1$$

oder, da $B_{33} \gtrless 0$ sein kann, $\dfrac{B_{33}^2}{-\varkappa B_{33}(B_{11} + B_{22})} < 1$[3]), d. h. $B_{33}\{\varkappa(B_{11} + B_{22}) + B_{33}\} < 0$ oder nach (11)

$$\{(a_{11} - \varkappa\varrho_1)(a_{22} - \varkappa\varrho_1) - a_{12}^2\} \cdot \Delta'(\varrho_1) > 0 \tag{16}$$

ist.

[3]) Es ist $B_{33}(B_{11} + B_{22}) = B_{13}^2 + B_{23}^2 > 0$.

Sind nun $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die zunächst als *verschieden* vorausgesetzten Wurzeln von (9), so ist

$$\Delta(\varrho) = \varkappa^2(\varrho_1 - \varrho)(\varrho_2 - \varrho)(\varrho_3 - \varrho), \quad \Delta'(\varrho_1) = -\varkappa^2(\varrho_2 - \varrho_1)(\varrho_3 - \varrho_1),$$

so daß (16) zu

$$(16') \qquad \{(a_{11} - \varkappa\varrho_1)(a_{22} - \varkappa\varrho_2) - a_{12}^2\}(\varrho_2 - \varrho_1)(\varrho_3 - \varrho_1) < 0$$

wird.

Sind ϱ_2 und ϱ_3 imaginär, so wird

$$(\varrho_2 - \varrho_1)(\varrho_3 - \varrho_1) = (\bar{\varrho} + \bar{\bar{\varrho}}i - \varrho_1)(\bar{\varrho} - \bar{\bar{\varrho}}i - \varrho_1) = (\bar{\varrho} - \varrho_1)^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2 > 0, \quad \bar{\bar{\varrho}} \neq 0,$$

und die Bedingung (16′) lautet einfach

$$(16'') \qquad (a_{11} - \varkappa\varrho_1)(a_{22} - \varkappa\varrho_2) - a_{12}^2 < 0.$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$(17) \qquad B_{33} = z = V(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa\varrho & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \varkappa\varrho \end{vmatrix}.$$

Es ist $V(\pm\infty) = +\infty$ und die Gleichung $V(\varrho) = 0$ ist eine Säkulargleichung, d. h. hat zwei *reelle* Wurzeln ϱ' und ϱ''.

Wir haben nun drei Unterfälle zu unterscheiden:

(a) $a_{12} \neq 0$, $a_{11} \neq a_{22}$. Dann sei $\varrho' < \varrho''$. Also ist die Kurve $z = V(\varrho)$ eine Parabel (Fig. 1a), deren Ordinaten zwischen ϱ' und ϱ'' negativ sind[4]). Da aber

$$V\left(\frac{a_{11}}{\varkappa}\right) = V\left(\frac{a_{22}}{\varkappa}\right) = -a_{12}^2$$

ist, so gehören die Punkte $\frac{a_{11}}{\varkappa}$ und $\frac{a_{22}}{\varkappa}$ der Strecke $\overline{\varrho'\varrho''}$ an (Fig. 1a) und es ist

$$\frac{a_{11}}{\varkappa} - \varrho' > 0, \quad \frac{a_{11}}{\varkappa} - \varrho'' < 0, \text{ d. h. } a_{11} - \varkappa\varrho' < 0, \quad a_{11} - \varkappa\varrho'' > 0.$$

Weiter ist für $\varrho \neq \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$

$$(18) \qquad b_{11}b = B_{22}B_{33} - B_{23}^2$$

oder

$$b = \Delta(\varrho) = \frac{1}{a_{11} - \varkappa\varrho}\left[V(\varrho)\{(a_{33} - \varrho)(a_{11} - \varkappa\varrho) - a_{31}^2\} - \{a_{23}(a_{11} - \varkappa\varrho) - a_{31}a_{12}\}^2\right],$$

woraus

$$(19) \qquad \Delta(\varrho') = -\frac{\{a_{23}(a_{11} - \varkappa\varrho') - a_{13}a_{12}\}^2}{a_{11} - \varkappa\varrho'},$$

$$\Delta(\varrho'') = -\frac{\{a_{23}(a_{11} - \varkappa\varrho'') - a_{13}a_{12}\}^2}{a_{11} - \varkappa\varrho''}$$

folgt. (Die Möglichkeit $\Delta(\varrho') = 0$ oder $\Delta(\varrho'') = 0$ bedeutet wegen $V(\varrho') = B_{33}(\varrho') = 0$, daß $t = 0$ ist. Wäre aber auch $B_{11} + B_{22} = 0$, so wäre $\Delta'(\varrho') = 0$, d. h. ϱ' Doppelwurzel von $\Delta(\varrho) = 0$, was wir ausschlossen.)

Daher gilt

$$(20) \qquad \Delta(-\infty) = +, \quad \Delta(\varrho') = +, \quad \Delta(\varrho'') = -, \quad \Delta(+\infty) = -.$$

Die Kurve $z = \Delta(\varrho)$ hat daher die Gestalt der Figuren 2a bis d, sowie f, die auch für $\varrho_2 = \varrho_3$ gelten, nicht aber die der Figur 2e, da sonst $(\varrho_2 - \varrho_1)(\varrho_3 - \varrho_1) < 0$ wäre. Hat nun $\Delta(\varrho) = 0$ nur *eine* reelle Wurzel, nämlich ϱ_1, so muß $\varrho' < \varrho_1 < \varrho''$ und damit $V(\varrho_1) < 0$ sein, d. h. (16″) ist erfüllt.

---

*) Die Figuren sind auf besonderen Seiten am Schlusse der Abhandlung zusammengestellt.

Hat aber $\Delta(\varrho) = 0$ *drei* reelle Wurzeln $\varrho_1 \neq \varrho_2 \neq \varrho_3$ und bezeichnet man mit ϱ_1 stets eine zwischen ϱ' und ϱ'' liegende, und wenn es deren drei sind, die kleinste oder größte Wurzel, und ϱ_2 und ϱ_3 so, daß $\varrho_2 < \varrho_3$ ist, so ist entweder $\varrho_2 < \varrho_3 < \varrho' < \varrho_1 < \varrho''$ oder $\left\{\begin{matrix} \varrho' < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho'' \\ \varrho' < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho'' \end{matrix}\right\}$ oder $\varrho' < \varrho_1 < \varrho'' < \varrho_2 < \varrho_3$ und damit $V(\varrho_1) < 0$, $(\varrho_2 - \varrho_1)(\varrho_3 - \varrho_1) > 0$, d. h. (16′) ist erfüllt.

(b) $\underline{a_{12} = 0,\ a_{11} \neq a_{22}}$ und etwa $a_{11} > a_{22}$. Dann ist $\varrho' = \frac{a_{11}}{\varkappa}$, $\varrho'' = \frac{a_{22}}{\varkappa}$, $\varrho' < \varrho''$, $V\left(\frac{\varrho' + \varrho''}{2}\right) = -\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2$. Also ist $z = V(\varrho)$ wieder eine Parabel, deren Ordinaten zwischen ϱ' und ϱ'' negativ sind (Fig. 1b). Weiter ist

$$(18') \qquad \Delta(\varrho) = b = V(\varrho)(a_{33} - \varrho) - a_{23}^2(a_{11} - \varkappa\varrho) - a_{13}^2(a_{22} - \varkappa\varrho),$$

$$(19') \qquad \Delta(\varrho') = a_{13}^2(a_{11} - a_{22}) = +, \quad \Delta(\varrho'') = -a_{23}^2(a_{11} - a_{22}) = -,$$

d. h. es gilt wieder (20) und die weiteren Schlüsse sind wie in (a).

(c) $\underline{a_{12} = 0,\ a_{11} = a_{22}}$. Dann ist $\varrho' = \varrho'' = \frac{a_{11}}{\varkappa}$. Die Parabel $z = V(\varrho)$ berührt die Abszissenachse in $\varrho' = \varrho''$ und es wird

$$\Delta(\varrho) = (a_{11} - \varkappa\varrho)(a_{33} - \varrho) - (a_{13}^2 + a_{23}^2)(a_{11} - \varkappa\varrho),$$

d. h. $\Delta(\varrho') = 0$, also $t = 0$, wenn nicht ϱ' Doppelwurzel von $\Delta(\varrho) = 0$ ist, was wir ausschlossen.

Unser Ergebnis fassen wir nun zusammen in folgendem

Satz. *Hat die charakteristische Gleichung* (9) *drei verschiedene Wurzeln, so läßt sich stets eine von ihnen, mit* ϱ_1 *bezeichnete, so bestimmen, daß die Bewegung* (5) *durchführbar und damit die gewünschte Normalform herstellbar ist.*

§ 3. Die Mittelpunktskegelschnitte für $\varkappa < 0$.

3. Läßt man die Querstriche wieder weg, so lautet die durch unsere Transformation gewonnene *Normalform* nunmehr

$$(\mathrm{I}) \qquad \varkappa\varrho_1 x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Daß x_1^2 dabei den Koeffizienten $\varkappa\varrho_1$ besitzt, folgt daraus, daß der Pol der Geraden $x_1 = 0$ in bezug auf (I) und ihr absoluter Pol übereinstimmen müssen. Wir suchen nun durch eine weitere Schiebung

$$(1) \qquad \varrho x_1 = \bar{x}_1, \quad \varrho x_2 = \bar{x}_2 C(u) - \bar{x}_3 S(u), \quad \varrho x_3 = \varkappa\bar{x}_2 S(u) + \bar{x}_3 C(u)$$

längs der Achse $x_1 = 0$ auch noch das Glied mit $\bar{x}_2\bar{x}_3$ zum Verschwinden zu bringen und so die Normalform

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \varkappa(\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2) + \varrho_3 x_3^2 = 0$$

herzustellen. Gelingt dies, so hat der Kegelschnitt (I_1) mit dem AK das Koordinatendreieck zum gemeinsamen Polardreieck. Die Ecken des Polardreiecks, insbesondere der Ursprung $(0|0|1)$, heißen die *Mittelpunkte*, seine Seiten die *Achsen* des Kegelschnitts. Die Größen ϱ_2 und ϱ_3 in (I_1) sind nichts anderes als die beiden übrigen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (9) der Nr. 1. Es gilt nämlich der

Hilfssatz. *Die charakteristische Gleichung* (9) *ist gegenüber jeder Bewegung invariant.*

Beweis. Dieser wird formal am einfachsten, wenn man die Gleichung des AK in der allgemeinen Form $g(x) = \Sigma\, b_{ik}x_ix_k$ annimmt. Er gilt, wie man ohne weiteres erkennt,

für beliebig viele homogene Veränderliche x_i. Die charakteristische Gleichung lautet nämlich

$$(*) \qquad \Delta(\varrho) = | a_{ik} - \varrho b_{ik} |.$$

Nun sei $x_i = \beta_{il}\bar{x}_l$ (ohne Proportionalitätsfaktor!) irgendeine Bewegung, die

$$g(x) \equiv b_{ik}x_ix_k = b_{ik}\beta_{il}\beta_{km}\bar{x}_l\bar{x}_m \equiv g(x) \equiv b_{lm}\bar{x}_l\bar{x}_m$$

in sich selbst überführt, so daß $| b_{ik} | = | b_{ik}\beta_{il}\beta_{km} | = | \beta_{ik} |^2 | b_{ik} |$, also $| \beta_{ik} |^2 = 1$ ist,

$$f(x) \equiv a_{ik}x_ix_k = a_{ik}\beta_{il}\beta_{km}\bar{x}_l\bar{x}_m \equiv \bar{a}_{lm}\bar{x}_l\bar{x}_m$$

aber in $f(\bar{x})$ überführt.

Multipliziert man (*) zweimal mit der Determinante $| \beta_{ik} |$, so ergibt sich unmittelbar

$$\Delta(\varrho) \equiv \bar{\Delta}(\varrho) \equiv | \bar{a}_{ik} - \varrho b_{ik} |.$$

Für die Form (I_1) lautet die charakteristische Gleichung aber

$$\Delta(\varrho) \equiv \varkappa^2(\varrho_1 - \varrho)(\varrho_2 - \varrho)(\varrho_3 - \varrho).$$

4. Mittels (1) wird die Gleichung (I) zu

$$(2) \quad \varkappa\varrho_1\bar{x}_1^2 + \frac{1}{2}\{(a_{22} + \varkappa a_{33}) + (a_{22} - \varkappa a_{33})\,C(2u) + 2\varkappa a_{23}S(2u)\}\,\bar{x}_2^2$$
$$+ \{2a_{23}C(2u) - (a_{22} - \varkappa a_{33})\,S(2u)\}\,\bar{x}_2\bar{x}_3$$
$$+ \frac{1}{2\varkappa}\{(a_{22} + \varkappa a_{33}) - (a_{22} - \varkappa a_{33})\,C(2u) - 2\varkappa a_{23}S(2u)\}\,\bar{x}_3 = 0.$$

Das Glied mit $\bar{x}_2\bar{x}_3$ verschwindet, wenn man

$$(3) \quad T(2u) = \frac{2a_{23}}{a_{22} - \varkappa a_{33}},\ C(2u) = \frac{\varepsilon(a_{22} - \varkappa a_{33})}{\sqrt{\Delta}} > 0,\ \varepsilon = \pm 1,\ S(2u) = \frac{2\varepsilon a_{23}}{\sqrt{\Delta}}$$

wählt, wo

$$(4_1) \qquad \Delta \equiv (a_{22} - \varkappa a_{33})^2 + 4\varkappa a_{23}^2 \equiv (a_{22} + \varkappa a_{33})^2 - 4\varkappa A_{11} > 0$$

sein muß. Nur unter dieser Bedingung ist die Normalform (I_1) möglich. (2) wird dann zu (I_1), wenn man

$$(5) \qquad \frac{1}{2\varkappa}(a_{22} + \varkappa a_{33} + \varepsilon\sqrt{\Delta}) = \varrho_2,\ \frac{1}{2\varkappa}(a_{22} + \varkappa a_{33} - \varepsilon\sqrt{\Delta}) = \varrho_3$$

setzt.

5. Wir bestimmen jetzt die Art des Mittelpunktskegelschnitts (I_1) oder genauer

$$(\mathrm{I}\,a_1) \qquad \varkappa(\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2) + \varrho_3 x_3^2 = 0,$$

indem wir seine *Schnitt-* und seine *Berührfigur* mit dem AK

$$(6a) \qquad \varkappa(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = 0$$

ermitteln. Da es bei $f(x) = 0$ nur auf die *Gleichung* ankommt, so können wir jetzt $\varrho_3 > 0$ voraussetzen, und da wegen (6a) die Reihenfolge von x_1 und x_2 beliebig ist, so ist die Annahme $\varrho_1 < \varrho_2$ erlaubt.

Dann sind von den Größen $\varkappa(\varrho_1 - \varrho_2)$, $\varrho_3 - \varrho_1$ und $\varrho_2 - \varrho_3$ stets *zwei* positiv, nämlich $\varkappa(\varrho_1 - \varrho_2)$ wegen $\varkappa < 0$ und $\varrho_1 < \varrho_2$ und entweder $\varrho_3 - \varrho_1$ oder $\varrho_2 - \varrho_3$. Denn aus $\varrho_3 - \varrho_1 < 0$ und $\varrho_2 - \varrho_3 < 0$ folgte $\varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_1$, d. h. $\varrho_2 < \varrho_1$ gegen die Voraussetzung.

Ebenso sind von den Größen $\varrho_3(\varrho_2 - \varrho_1)$, $\varkappa\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_3)$ und $\varkappa\varrho_1(\varrho_3 - \varrho_2)$ stets *zwei* positiv, nämlich $\varrho_3(\varrho_2 - \varrho_1)$ wegen $\varrho_3 > 0$ und $\varrho_1 < \varrho_2$, und entweder $\varkappa\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_3)$ oder $\varkappa\varrho_1(\varrho_3 - \varrho_2)$. Denn aus $\varkappa\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_3) < 0$ und $\varkappa\varrho_1(\varrho_3 - \varrho_2) < 0$ folgte wegen $\varkappa < 0$

$\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_3) > 0$ und $\varrho_1(\varrho_3 - \varrho_2) > 0$ und durch Addition $\varrho_3(\varrho_1 - \varrho_2) > 0$, was unmöglich ist. Bezeichnet man also zur Abkürzung die *positiven* Quadratwurzeln

$$+\sqrt{\varrho_2 - \varrho_3}, \quad +\sqrt{\varrho_3 - \varrho_1}, \quad +\sqrt{\varkappa(\varrho_1 - \varrho_2)} \text{ mit } W_1, W_2, W_3,$$
$$+\sqrt{\varkappa\varrho_1(\varrho_3 - \varrho_2)}, \quad +\sqrt{\varkappa\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_3)}, \quad +\sqrt{\varrho_3(\varrho_2 - \varrho_1)} \text{ mit } W'_1, W'_2, W'_3,$$

so sind in jedem Tripel sicher *zwei reelle* Wurzeln.

Nun ergeben sich aus ($\mathrm{I a_1}$) und (6a) die Gleichungen der durch die Schnittpunkte von ($\mathrm{I a_1}$) und (6a) laufenden Geradenpaare durch Elimination von x_1^2 oder x_2^2 oder x_3^2. Wir nennen jede Gerade dieser Paare eine *Brenngerade* von $f(x) = 0$ und bezeichnen sie mit f_{ik}, wenn sie unter den 4 Schnittpunkten S_1, S_2, S_3, S_4 von ($\mathrm{I a_1}$) und (6a) den Punkt S_i mit dem Punkt S_k verbindet. Wir wählen die Zuordnung der Fußnummern so, daß *Brenngeraden* und *absolute Punkte* — so nennen wir S_1, S_2, S_3, S_4 — folgende Koordinaten erhalten:

$$\text{(7a)} \qquad \begin{cases} f_{23} \equiv S_2S_3 & [0 \mid W_3 \mid W_2], \quad f_{14} \equiv S_1S_4 \quad [0 \mid W_3 \mid -W_2] \\ f_{31} \equiv S_3S_1 & [W_3 \mid 0 \mid W_1], \quad f_{24} \equiv S_2S_4 \quad [-W_3 \mid 0 \mid W_1] \\ f_{12} \equiv S_1S_2 & [W_2 \mid W_1 \mid 0], \quad f_{34} \equiv S_3S_4 \quad [W_2 \mid -W_1 \mid 0] \end{cases}$$

$$\text{(8a)} \qquad \begin{cases} S_1 & (-W_1 \mid W_2 \mid W_3) \\ S_2 & (W_1 \mid -W_2 \mid W_3) \\ S_3 & (W_1 \mid W_2 \mid -W_3) \\ S_4 & (W_1 \mid W_2 \mid W_3) \end{cases}$$

Die Schnittpunkte $S_2S_3 \times S_1S_4 \equiv M_1$, $S_3S_1 \times S_2S_4 \equiv M_2$, $S_1S_2 \times S_3S_4 \equiv M_3$ sind die *Mittelpunkte* $(1 \mid 0 \mid 0)$, $(0 \mid 1 \mid 0)$, $(0 \mid 0 \mid 1)$ von $f(x) = 0$.

6. Die zu $f(x)$ und $x \mid x$ adjungierten Formen sind, abgesehen vom Faktor $\varkappa$

$$\text{(I b}_1\text{)} \qquad \frac{F(X)}{\varkappa} \equiv \varrho_2\varrho_3 X_1^2 + \varrho_3\varrho_1 X_2^2 + \varkappa\varrho_1\varrho_2 X_3^2,$$

$$\text{(6b)} \qquad X \mid X \equiv X_1^2 + X_2^2 + \varkappa X_3^2.$$

Aus ($\mathrm{I b_1}$) und (6b) ergeben sich die Gleichungen der Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten von ($\mathrm{I b_1}$) und (6b) durch Elimination von X_1^2 oder X_2^2 oder X_3^2. Wir nennen jeden Punkt dieser Schnittpunktpaare einen *Brennpunkt* von $F(X) = 0$ und damit $f(x) = 0$, und bezeichnen ihn mit F_{ik}, wenn er unter den gemeinsamen Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4 von ($\mathrm{I b_1}$) und (6b) der Schnittpunkt von t_i und t_k ist. Nun sind die Eckenlinien des Vierseits der Tangenten t_2 nichts anderes als die Seiten $m_1 \equiv M_2M_3$, $m_2 \equiv M_3M$, $m_3 \equiv M_1M_2$ des gemeinsamen Polardreiecks mit den Gleichungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Wir wählen die Zuordnung der Fußnummern so, daß F_{23} und F_{14} auf m_1, F_{31} und F_{24} auf m_2, F_{12} und F_{34} auf m_3 liegen, und die *Brennpunkte* und die *absoluten Tangenten* — so nennen wir t_1, t_2, t_3, t_4 — die folgenden Koordinaten haben:

$$\text{(7b)} \qquad \begin{cases} F_{23} \equiv t_2 \times t_3 & (0 \mid W'_3 \mid W'_2) \quad F_{14} \equiv t_1 \times t_4 \quad (0 \mid W'_3 \mid -W'_2) \\ F_{31} \equiv t_3 \times t_1 & (W'_3 \mid 0 \mid W'_1) \quad F_{24} \equiv t_2 \times t_4 \quad (-W'_3 \mid 0 \mid W'_1) \\ F_{12} \equiv t_1 \times t_2 & (W'_2 \mid W'_1 \mid 0) \quad F_{34} \equiv t_3 \times t_4 \quad (W'_2 \mid -W'_1 \mid 0) \end{cases}$$

$$\text{(8b)} \qquad \begin{cases} t_1 & [-W'_1 \mid W'_2 \mid W'_3] \\ t_2 & [W'_1 \mid -W'_2 \mid W'_3] \\ t_3 & [W'_1 \mid W'_2 \mid -W'_3] \\ t_4 & [W'_1 \mid W'_2 \mid W'_3] \end{cases}.$$

7. Wir fragen nun, wann die *absoluten Punkte* und die *absoluten Tangenten reell* sind. Die Reellität der absoluten Punkte wird durch W_1, W_2, W_3 bestimmt. Wir sahen,

daß mindestens zwei von diesen Wurzeln reell sind. Es gibt daher nur *zwei* Möglichkeiten: Entweder ist die dritte ebenfalls *reell* und damit *alle vier absoluten Punkte*, oder die dritte ist *imaginär* und damit *alle vier absoluten Punkte*.

Nun war $\varrho_1 < \varrho_2$ und $\varrho_3 > 0$. Die 1. Möglichkeit tritt nur ein für $\varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2$, die 2. Möglichkeit für $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$ oder $\varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2$.

Wir haben den

Satz 1. *Alle vier absoluten Punkte sind reell für* $\varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2$, $0 < \varrho_3$, *alle vier absoluten Punkte sind imaginär für* $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$, $0 < \varrho_3$ *oder* $0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2$.

Die Reellität der *absoluten Tangenten* wird durch W_1', W_2', W_3' bestimmt. Durch dieselbe Überlegung wie vorhin erhalten wir den

Satz 2. *Alle vier absoluten Tangenten sind reell für* $\varrho_1\varrho_3 < \varrho_1\varrho_2 < \varrho_2\varrho_3$, *alle vier absoluten Tangenten sind imaginär für* $\varrho_1\varrho_3 < \varrho_2\varrho_3 < \varrho_1\varrho_2$ *oder* $\varrho_1\varrho_2 < \varrho_1\varrho_3 < \varrho_2\varrho_3$.

Dabei ist nur zu beachten, daß $\varrho_3(\varrho_2 - \varrho_1) > 0$, also $\varrho_1\varrho_3 < \varrho_2\varrho_3$ ist.

Jetzt haben wir die Aussagen der Sätze 1 und 2 zu vereinigen. Logisch sind vier Fälle möglich:

1. Fall: 4 reelle absolute Punkte und 4 reelle absolute Tangenten;

2. Fall: 4 reelle absolute Punkte und 4 imaginäre absolute Tangenten;

3. Fall: 4 imaginäre absolute Punkte und 4 reelle absolute Tangenten;

4. Fall: 4 imaginäre absolute Punkte und 4 imaginäre absolute Tangenten.

Wir zeigen, daß sie auch wirklich eintreten und daß der 4. Fall sich sogar noch in *drei* Unterfälle spaltet.

Die absoluten Punkte sind *reell* für (a) $\varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2$, $\varrho_3 > 0$, d. h. für

$$(a_1)\quad \varrho_1 < 0,\ \varrho_3 > 0,\ \varrho_2 > 0 \qquad \text{und} \qquad (a_2)\quad \varrho_1 > 0,\ \varrho_3 > 0,\ \varrho_2 > 0.$$

Sie sind *imaginär* für (b) $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$, $\varrho_3 > 0$, d. h. für

$$(b_1)\ \varrho_1 < 0,\ \varrho_2 < 0,\ \varrho_3 > 0,\quad (b_2)\ \varrho_1 < 0,\ \varrho_2 > 0,\ \varrho_3 > 0,\quad (b_3)\ \varrho_1 > 0,\ \varrho_2 > 0,\ \varrho_3 > 0,$$

und für (c) $0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2$.

Wir vergleichen die Bedingungen (a_1) und (a_2) zuerst mit der Bedingung (a') $\varrho_1\varrho_3 < \varrho_1\varrho_2 < \varrho_2\varrho_3$ für das Reellsein der absoluten Tangenten. Mit $\varrho_3 > 0$ gibt (a') $\varrho_1 < \varrho_2$, mit (a_1), d. h. $\varrho_1 < 0$ und $\varrho_2 > 0$ ergibt sich $\varrho_2 < \varrho_3$ und $\varrho_1 < \varrho_3$, zusammen also $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$, was (a) widerspricht. Mit (a_2), d. h. $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 > 0$ gibt (a') $\varrho_3 < \varrho_2$ und $\varrho_1 < \varrho_3$, zusammen also $0 < \varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2$.

Satz 3. *Alle vier absoluten Punkte und alle vier absoluten Tangenten sind reell für*

$$0 < \varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2.$$

Jetzt vergleichen wir die Bedingungen (a_1) und (a_2) mit den Bedingungen (b_1') $\varrho_1\varrho_3 < \varrho_2\varrho_3 < \varrho_1\varrho_2$ und (b_2') $\varrho_1\varrho_2 < \varrho_1\varrho_3 < \varrho_2\varrho_3$ für das Imaginärsein der absoluten Tangenten. Das Ergebnis ist

Satz 4. *Alle vier absoluten Punkte sind reell, alle vier absoluten Tangenten sind imaginär für*

$$\varrho_1 < 0 < \varrho_3 < \varrho_2.$$

Dann vergleichen wir die Bedingungen (b_1) bis (b_3) und (c) für das Imaginärsein der absoluten Punkte mit den Bedingungen (a') für das Reellsein der absoluten Tangenten. Das Ergebnis ist

Satz 5. *Alle vier absoluten Punkte sind imaginär, alle vier absoluten Tangenten sind reell für*

$$\varrho_1 < 0 < \varrho_2 < \varrho_3.$$

Endlich vergleichen wir die Bedingungen für das Imaginärsein der absoluten Punkte mit den Bedingungen für das Imaginärsein der absoluten Tangenten und erhalten

Satz 6. *Alle vier absoluten Punkte und alle vier absoluten Tangenten sind imaginär, wenn*

$$\textit{entweder}\quad \varrho_1 < \varrho_2 < 0 < \varrho_3 \quad \textit{oder}\quad 0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 \quad \textit{oder}\quad 0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2$$

ist.

8. Im 1. *Fall* (Satz 3) nennt man die Kurve eine *konkave Hyperbel* (Fig. 3)[5]), im 2. *Fall* (Satz 4) eine *konvexe Hyperbel* (Fig. 4). Der 3. *Fall* (Satz 5) bedeutet, daß der Kegelschnitt aus lauter idealen Punkten besteht: Er ist *außerabsolut* (oder *ideal*) und zwar *ausschließend* (Fig. 5). Der 4. *Fall* (Satz 6) spaltet sich in 3 Unterfälle (Fig. 6).

Im 1. *Unterfall* $\varrho_1 < \varrho_2 < 0 < \varrho_3$ ist $f(x) \equiv \varkappa\varrho_1 x_1^2 + \varkappa\varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 y_3^2$ wegen $\varkappa < 0$ offenbar eine *positive definite Form*, der Kegelschnitt ist *nullteilig*.

Im 2. *Unterfall* $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$ ist $f(x) = 0$ *außerabsolut* und zwar *umschließend*. Es ist nämlich jeder seiner Punkte ideal.

Beweis. x ist außerabsolut, wenn $(^0)$ $x \mid x = \varkappa(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 < 0$ ist. Liegt x auf $f(x) = 0$, so ist $\varkappa\varrho_1 x_1^2 + \varkappa\varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 x_3^2 = 0$. Da $\varrho_3 > 0$ ist, so ist auch $\varkappa\varrho_3(x_1^2 + x_2^2) + \varrho_3 x_3^2 < 0$, also wegen $\varrho_3 x_3^2 = -\varkappa\varrho_1 x_1^2 - \varkappa\varrho_2 x_2^2$ auch $\varkappa(\varrho_3 - \varrho_1)\, x_1^2 + \varkappa(\varrho_3 - \varrho_2)\, x_2^2 < 0$ und das ist für $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$ richtig. Umgekehrt folgt aus letzterem wieder $(^0)$.

Ist aber die Bedingung $0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2$ des 3. *Unterfalles* erfüllt, so ist für jeden Punkt des Kegelschnittes $x \mid x > 0$, d. h. er ist ganz *innerabsolut*. Wir nennen ihn eine *Ellipse*.

Es war $\varrho_3 > 0$, $\varrho_1 < \varrho_2$ vorausgesetzt. Ändert man in $f(x) = 0$ die Vorzeichen, so erhält man $\varrho_3 < 0$, $\varrho_1 > \varrho_2$. Berücksichtigt man beide Möglichkeiten und außerdem die Vertauschbarkeit der Achsen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ und damit die von ϱ_1 und ϱ_2, so erhält man den zusammenfassenden

Satz 7. *Der Mittelpunktskegelschnitt* $f(x) \equiv \varkappa(\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2) + \varrho_3 x_3^2 = 0$, *in dessen Gleichung* $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ *reell und verschieden sind, ist für den*

1. *Fall*: $0 < \varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2$ *oder* $0 < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_1$ *oder* $\varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_1 < 0$ *oder* $\varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2 < 0$
eine konkave Hyperbel,

2. *Fall*: $\varrho_1 < 0 < \varrho_3 < \varrho_2$ *oder* $\varrho_2 < 0 < \varrho_3 < \varrho_1$ *oder* $\varrho_2 < \varrho_3 < 0 < \varrho_1$ *oder* $\varrho_1 < \varrho_3 < 0 < \varrho_2$
eine konvexe Hyperbel,

3. *Fall*: $\varrho_1 < 0 < \varrho_2 < \varrho_3$ *oder* $\varrho_2 < 0 < \varrho_1 < \varrho_3$ *oder* $\varrho_3 < \varrho_2 < 0 < \varrho_1$ *oder* $\varrho_3 < \varrho_1 < 0 < \varrho_2$
ausschließend außerabsolut,

4. *Fall*: $\varrho_1 < \varrho_2 < 0 < \varrho_3$ *oder* $\varrho_2 < \varrho_1 < 0 < \varrho_3$ *oder* $\varrho_3 < 0 < \varrho_2 < \varrho_1$ *oder* $\varrho_3 < 0 < \varrho_1 < \varrho_2$
nullteilig,

5. *Fall*: $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$ *oder* $0 < \varrho_2 < \varrho_1 < \varrho_3$ *oder* $\varrho_3 < \varrho_2 < \varrho_1 < 0$ *oder* $\varrho_2 < \varrho_1 < \varrho_2 < 0$
umschließend außerabsolut,

6. *Fall*: $0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2$ *oder* $0 < \varrho_3 < \varrho_2 < \varrho_1$ *oder* $\varrho_2 < \varrho_1 < \varrho_3 < 0$ *oder* $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < 0$
eine Ellipse.

§ 4. Der Fall zweier gleicher Wurzeln der charakteristischen Gleichung bei den Mittelpunktskegelschnitten.

9. Unter den Mittelpunktskegelschnitten können noch solche vorkommen, bei denen zwei der Wurzeln der charakteristischen Gleichung gleich sind[6]). Wesentlich verschieden

[5]) In den schematischen Figuren 3 bis 6 ist der AK ins „Endliche" projiziert. Dies geschieht am einfachsten durch Projektion des AK $\varkappa(x_1^2 + x_2^2) + x_4^2 = 0$, $x_3 = 0$, vom Punkt $(0/0/h/1)$ auf die Ebene $x_3 = lx_4$ in den „Kreis" $\varkappa(x_1^2 + x_2^2) + \left(\frac{l}{h} - 1\right)^2 x_4^2$, $x_3 = 0$.

[6]) Was tritt für $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ ein?

sind die Fälle $\varrho_1 = \varrho_2$ und $\varrho_2 = \varrho_3$ (oder $\varrho_1 = \varrho_3$, was nur auf eine Vertauschung von $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ hinauskommt). Es gelten dann

Satz 8. *Die Kurve* $\varkappa\varrho_1(x_1^2 + x_2^2) + \varrho_3 x_3^2 = 0$ *stellt*

für $\varrho_1 < 0 < \varrho_3$ *oder* $\varrho_3 < 0 < \varrho_1$ *einen nullteiligen,*
für $0 < \varrho_3 < \varrho_1$ *oder* $\varrho_1 < \varrho_3 < 0$ *einen einteiligen,*
für $0 < \varrho_1 < \varrho_3$ *oder* $\varrho_3 < \varrho_1 < 0$ *einen außerabsoluten Kreis*

um den Ursprung mit Radius σ *dar, wo* $C(\sigma) = \sqrt{\dfrac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_1}}$ *ist.*

Satz 9. *Die Kurve* $\varkappa\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2(\varkappa x_2^2 + x_3^2) = 0$ *stellt*

für $0 < \varrho_2 < \varrho_1$ *oder* $\varrho_1 < \varrho_2 < 0$ *eine innerabsolute,*
für $0 < \varrho_1 < \varrho_2$ *oder* $\varrho_2 < \varrho_1 < 0$ *eine außerabsolute Abstandslinie*

zur Achse $x_1 = 0$ *im Abstand* σ *dar, wo* $C(\sigma) = \sqrt{\dfrac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}}$ *ist.*

10. Es fragt sich nun, welche Bedingungen für die Größen φ und t der Nr. 1 und 2 sich einstellen, damit die beiden Fälle der Nr. 9 eintreten. Wir beginnen mit dem Falle $\varrho_1 \neq \varrho_2 = \varrho_3$ des Satzes 9. Hier ist $\Delta'(\varrho_1) = -\varkappa^2(\varrho_2 - \varrho_1)^2 < 0$. Da wegen Gleichung (20) in Nr. 2 $\varrho' < \varrho_1 < \varrho''$ sein muß, so ist Ungleichung (16″) dort erfüllt. Es gibt also stets ein geeignetes t.

Im Falle $\varrho_1 = \varrho_2 \neq \varrho_3$ des Satzes 8 ist der Kreis gegenüber irgendeiner Drehung um seinen Mittelpunkt invariant. Der Drehwinkel φ der Nr. 1 kann also nicht eindeutig bestimmt sein. In der Tat muß $\Delta'(\varrho_1) = 0$, also nach Gleichung (11) der Nr. 1

$$\varkappa(B_{11} + B_{22}) + B_{33}, \quad \frac{B_{33}}{B_{11} + B_{22}} = -\varkappa$$

sein. Dann folgt aus (15) von Nr. 1 die Gleichung $1 + \varkappa T^2(t) = \dfrac{1}{C^2(t)} = 0$, was unmöglich ist. Der einzige Ausweg ist, daß B_{33} und $B_{11} + B_{22}$ beide verschwinden.

Dann bleibt t unbestimmt. Mit $B_{33} = 0$ folgt aus Gleichung (10) der Nr. 1 $B_{13} = 0$, $B_{23} = 0$. Ferner ist $B_{11}^2 + B_{11}B_{22} = B_{11}^2 + B_{12}^2 = 0$, also $B_{11} = 0$, $B_{12} = 0$ und damit auch noch $B_{22} = 0$. Also verschwinden alle B_{ik}. Die drei Gleichungen (8′) der Nr. 1 sind vom Rang 1, d. h. stellen nur *eine* unabhängige Gleichung dar, z. B.

$$(^0) \qquad a_{13}C(t)\cos\varphi + a_{23}C(t)\sin\varphi + (a_{33} - \varphi_1)\,\varkappa S(t) = 0;$$

t ist beliebig und φ aus $(^0)$ bestimmt, falls $(a_{13}C(t))^2 + (a_{23}C(t)) - (S(a_{33} - \varrho_1)\,\varkappa S(t))^2 > 0$ d. h.

$$(^{00}) \quad \operatorname{tangh}^2(\sqrt{-\varkappa}t) < \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2}{(-\varkappa)(a_{33} - \varrho)^2} = \frac{b_{13}^2 + b_{23}^2}{(-\varkappa)\,b_{33}^2} = \frac{b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33}}{(-\varkappa)\,b_{33}^2} = \frac{b_{11} + b_{22}}{(-\varkappa)\,b_{33}}$$

ist. Nun ist aber $b_{11} + b_{22} = a_{11} + a_{22} - 2\varkappa\varrho_1$, $b_{33} = a_{33} - \varrho_1$. Ferner folgt wegen $\varrho_2 = \varrho_1$ aus Gleichung (9′) der Nr. 1 $a_{11} + a_{22} + \varkappa a_{33} = \varkappa(2\varrho_1 + \varrho_3)$. Daher wird

$$(^{000}) \qquad \frac{b_{11} + b_{22}}{(-\varkappa)\,b_{33}} = \frac{\varkappa(2\varrho_1 + \varrho_3) - \varkappa a_{33} - 2\varkappa\varrho_1}{(-\varkappa)(a_{33} - \varrho_1)} = \frac{a_{33} - \varrho_3}{a_{33} - \varrho_1}.$$

Da $\operatorname{tangh}^2(\sqrt{-\varkappa}t) < 1$ sein muß, so ist für einen einteiligen Kreis $0 < \varrho_1 < \varrho_3$ oder $\varrho_3 < \varrho_1 < 0$ die Bedingung $(^{00})$ stets erfüllbar.

§ 5. Die Semihyperbel.

11. Ist

$$(4_2) \qquad \Delta \equiv (a_{22} - \varkappa a_{33})^2 + 4\varkappa a_{23}^2 = (a_{22} + \varkappa a_{33})^2 - 4\varkappa A_{11} < 0,$$

so ist die Schiebung (1) der Nr. 3 nicht möglich. Die beiden Wurzeln ϱ_2 und ϱ_3 der charakteristischen Gleichung sind komplex:

$$\varrho_2 = \bar{\varrho} + \bar{\bar{\varrho}} i, \ \varrho_3 = \bar{\varrho} - \bar{\bar{\varrho}} i, \text{ so daß } \varrho_2 + \varrho_3 = 2\bar{\varrho}, \ \varrho_2 \varrho_3 = \bar{\varrho}^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2,$$

also nach (5) der Nr. 3

$$(10) \qquad a_{22} + \varkappa a_{33} = 2\varkappa\bar{\varrho}, \quad A_{11} = \varkappa(\bar{\varrho}^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2)$$

wird. Wegen $\varkappa < 0$ muß in (4_2) $A_{11} < 0$ sein, was nach (10_2) stimmt.

Nun sind $(0 \mid -a_{23} + \sqrt{-A_{11}} \mid a_{33})$ die Schnittpunkte der Kurve (I) der Nr. 3 mit der Achse $x_1 = 0$, also *reell*. Wir behaupten, daß der eine von ihnen innerabsolut, der andere außerabsolut ist. Es ist nämlich für sie

$$x \mid x = \varkappa a_{33}^2 + a_{23}^2 - A_{11} \pm 2a_{23}\sqrt{-A_{11}} = A' \pm 2a_{23}\sqrt{-A_{11}}$$

und

$$(A' + 2a_{23}\sqrt{-A_{11}})(A' - 2a_{33}\sqrt{-A_{11}}) = a_{33}^2 \Delta < 0, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir führen nun wieder die Schiebung (1) der Nr. 3 aus. Die Gleichung (I) geht in die dortige Gleichung (2) über. Wir wählen nun u so, daß der innerabsolute Schnittpunkt des Kegelschnitts mit $x_1 = 0$ Ursprung wird. Dann muß in der dortigen Gleichung (2) das Glied mit x_3^2 verschwinden, also

$$(a_{22} + \varkappa a_{33}) - (a_{22} - \varkappa a_{33}) C(2u) - 2\varkappa a_{23} S(2u) = 2\{a_{22} S^2(u) - 2\varkappa a_{23} S(u) C(u) + \varkappa a_{33} C^2(u)\} = 0,$$

also

$$(11) \qquad T(u) = \frac{a_{23} - \delta\sqrt{-A_{11}}}{a_{22}} = \frac{a_{33}}{a_{23} + \delta\sqrt{-A_{11}}}$$

sein.

Dann wird in (2) der Nr. 3 $(a_{22} - \varkappa a_{33}) C(2u) + 2\varkappa a_{23} S(2u) = a_{22} + \varkappa a_{33}$, also der Koeffizient von $\bar{x}_2^2$ einfach $a_{22} + \varkappa a_{33}$. Derjenige von $2\bar{x}_2\bar{x}_3$ aber wird

$$C(u)(a_{23} C(u) - a_{22} S(u)) - \varkappa S(u)(a_{23} S(u) - a_{33} C(u))$$
$$= C^2(u)(a_{23} - a_{22} T(u)) - \varkappa S^2(u)(a_{23} - a_{33} Ct(u)) = \delta\sqrt{-A_{11}}(C^2(u) + \varkappa S^2(u)) = \delta\sqrt{-A_{11}}.$$

Die Gleichung unserer Kurve erhält also die Normalform

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \varkappa\varrho_1 x_1^2 + (a_{22} + \varkappa a_{33}) x_2^2 + 2\delta\sqrt{-A_{11}}\, x_2 x_3 = 0, \quad \Delta < 0,$$

oder wegen (10) auch

$$(12) \qquad \varkappa\varrho_1 x_1^2 + 2\varkappa\bar{\varrho}\bar{x}_2^2 + 2\delta\sqrt{-\varkappa(\bar{\varrho}^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2)}\, x_2 x_3 = 0.$$

Die Kurve heißt *Semihyperbel* (Fig. 7). Sie trifft die Achse $x_1 = 0$ im Ursprung und dem *außerabsoluten Punkt* $(0 \mid -2\delta\sqrt{A_{11}} \mid a_{22} + \varkappa a_{23})$.

Sie muß also den AK in 2 reellen und 2 imaginären Punkten schneiden und mit ihm 2 reelle und 2 imaginäre Tangenten gemein haben. In der Tat: Die Schnittpunkte von (12) mit dem AK werden

$$\left(\sqrt{(\delta\sqrt{\bar{\varrho}^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2} \pm \sqrt{(\bar{\varrho} - \varrho_1)^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2})^2 - \varrho_1^2} \mid \varrho_1 \mid \sqrt{-\varkappa}\{\delta\sqrt{\bar{\varrho}^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2} \pm \sqrt{(\bar{\varrho} - \varrho_1)^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2}\}\right).$$

Hier ist der Ausdruck unter der ersten Wurzel gleich

$$2\{\bar{\varrho}^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2 - \bar{\varrho}\varrho_1 \pm \delta\sqrt{\bar{\varrho}^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2}\sqrt{(\bar{\varrho} - \varrho_1)^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2}\}.$$

Der eine dieser beiden Ausdrücke ist positiv, der andere negativ, falls

$$(13) \qquad (\bar{\varrho}^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2 - \bar{\varrho}\varrho_1)^2 < (\bar{\varrho}^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2)(\bar{\varrho}^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2 - 2\bar{\varrho}\varrho_1 + \varrho_1^2)$$

ist, und das gilt, weil daraus $0 < \bar{\bar{\varrho}}^2 \varrho_1^2$ folgt, und umgekehrt.

Die zu (I_2) adjungierte Form ist, bis auf einen konstanten Faktor, die linke Seite der Gleichung

$$(\mathrm{Ib}_2) \qquad \frac{X_1^2}{\varkappa\varrho_1^2} + \frac{2}{A_{11}}\{(a_{22} + \varkappa a_{33})\, X_3^2 - 2\delta\sqrt{-A_{11}}\, X_2 X_3\} = 0.$$

Mit ihrer Hilfe beweist man die Behauptung über die Tangenten.

§ 6. Die Parabeln.

12. Ist

$$(4_3) \qquad \Delta \equiv (a_{11} - \varkappa a_{33})^2 + 4\varkappa a_{23}^2 = 0,$$

so ist die Schiebung (1) der Nr. 3 ebenfalls nicht möglich. Die beiden Wurzeln ϱ_2 und ϱ_3 sind

$$(14) \qquad \varrho_2 = \varrho_3 = \frac{a_{22} + \varkappa a_{33}}{2\varkappa}.$$

Wir werden sofort zeigen, daß der Kegelschnitt (I) der Nr. 3 den AK jetzt berührt. Wir nennen ihn *Parabel.*

Aus $\Delta = 0$ folgt $2a_{23} = \pm\left(\frac{a_{11}}{\sqrt{-\varkappa}} + \sqrt{-\varkappa}\, a_{33}\right)$. Wir wählen das Minuszeichen und erhalten die Kurvengleichung

$$(15) \qquad \varkappa\varrho_1 x_1^2 + \left(\frac{a_{22}}{\sqrt{-\varkappa}}\, x_2 - a_{33} x_3\right)(\sqrt{-\varkappa}\, x_2 - x_3) = 0.$$

Aus (15) und der Gleichung $\varkappa x_1^2 - (\sqrt{-\varkappa}\, x_2 + x_3)(\sqrt{-\varkappa}\, x_2 - x_3) = 0$ des AK erkennt man, daß sich beide im Punkt $(0 \mid 1 \mid \sqrt{-\varkappa})$ berühren und die gemeinsame Tangente $\sqrt{-\varkappa}\, x_2 - x_3 = 0$ haben.

Zur Vereinfachung der Rechnung ist es zweckmäßig, nach (14)

$$\varrho_2 = \frac{a_{22} + \varkappa a_{33}}{2\varkappa} \text{ und dazu } \frac{a_{22} - \varkappa a_{33}}{2\varkappa} = \varrho'$$

einzuführen, also umgekehrt

$$(16) \qquad a_{22} = \varkappa(\varrho_2 + \varrho'), \quad a_{33} = \varrho_2 - \varrho'$$

zu setzen. Damit wird (15) zu

$$(\mathrm{Ia}_3) \qquad \varkappa\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2(\varkappa x_2^2 + x_3^2) - \varrho'(\sqrt{-\varkappa}\, x_2 - x_3)^2 = 0,$$

der *Normalform der Parabelgleichung.*

13. Die Arten der Parabeln ergeben sich, wenn man die *Schnitt-* und die *Berührfigur* der Kurve (Ia_3) und des AK bestimmt.

Zunächst ergibt sich als Klassengleichung von (Ia_3) die Gleichung

$$(\mathrm{Ib}_3) \qquad \varrho_2^2 X_1^2 + \varrho_1\varrho_2(X_2^2 + \varkappa X_3^2) - \varrho'\varrho_1(X_2 + \sqrt{-\varkappa}\, X_3)^2 = 0.$$

Nun ergeben sich als *absolute Punkte* von (Ia_3) außer $(0 \mid 1 \mid \sqrt{-\varkappa})$

$$(2\sqrt{\varrho'(\varrho_2 - \varrho_1)} \mid \varrho' - \varrho_2 + \varrho_1 \mid (\varrho' + \varrho_2 - \varrho_1)\sqrt{-\varkappa}),$$

als *absolute Tangenten* von (Ib_3) außer $[0 \mid \sqrt{-\varkappa} \mid 1]$

$$[2\sqrt{-\varkappa\varrho'\varrho_1\varrho_2(\varrho_2 - \varrho_1)} \mid \{(\varrho_1 - \varrho_2)\,\varrho_1 + \varrho'\varrho_2\}\sqrt{-\varkappa} \mid (\varrho_1 - \varrho_2)\,\varrho_2 - \varrho'\varrho_1].$$

Daher gelten die Sätze

Satz 1. *Die beiden absoluten Punkte sind* $\left\{\begin{matrix}\textit{imaginär}\\ \textit{reell}\end{matrix}\right\}$, *je nachdem* $\varrho'(\varrho_2 - \varrho_1) \gtrless 0$ *ist.*

Satz 2. *Die beiden absoluten Tangenten sind* $\left\{\begin{matrix}\textit{imaginär}\\ \textit{reell}\end{matrix}\right\}$, *je nachdem*

$$\varrho'(\varrho_2 - \varrho_1)\cdot\varrho_1\varrho_2 \gtrless 0 \text{ ist.}$$

Überdies gilt

Satz 3. *Der von* $(0 \mid 1 \mid \sqrt{-\varkappa})$ *verschiedene Schnittpunkt der Parabel mit der Achse* $x_1 = 0$ *ist* $(0 \mid \varrho' - \varrho_2 \mid (\varrho' + \varrho_2)\sqrt{-\varkappa})$, *also* $\left\{\begin{matrix}\textit{innerabsolut}\\ \textit{außerabsolut}\end{matrix}\right\}$, *je nachdem* $\varrho'\varrho_2 \gtrless 0$ *ist.*

14. Damit ergibt sich folgende *Einteilung der Parabeln*:

1. *Fall*: 2 *imaginäre* absolute Punkte und 2 *imaginäre* absolute Tangenten;
   1. *Unterfall*: $\varrho'(\varrho_2 - \varrho_1) < 0$, $\varrho_1\varrho_2 > 0$, $\varrho'\varrho_2 > 0$: *Elliptische Parabel* (Fig. 8).
   2. *Unterfall*: $\varrho'(\varrho_2 - \varrho_1) < 0$, $\varrho_1\varrho_2 > 0$, $\varrho'\varrho_2 < 0$: *Außerabsolute Parabel, umschließend* (Fig. 9).
2. *Fall*: 2 *reelle* absolute Punkte und 2 *imaginäre* absolute Tangenten, $\varrho'(\varrho_2 - \varrho_1) > 0$, $\varrho_1\varrho_2 < 0$[7]: *Konvexe hyperbolische Parabel* (Fig. 10).
3. *Fall*: 2 *reelle* absolute Punkte und 2 *reelle* absolute Tangenten;
   1. *Unterfall*: $\varrho'(\varrho_2 - \varrho_1) > 0$, $\varrho_1\varrho_2 > 0$, $\varrho'\varrho_2 > 0$: *Konkave hyperbolische Parabel* (Fig. 11).
   2. *Unterfall*: $\varrho'(\varrho_2 - \varrho_1) > 0$, $\varrho_1\varrho_2 > 0$, $\varrho'\varrho_2 < 0$: *Zweiteilige Parabel* (Fig. 12).
4. *Fall*: 2 *imaginäre* absolute Punkte und 2 *reelle* absolute Tangenten; $\varrho'(\varrho_2 - \varrho_1) < 0$, $\varrho_1\varrho_2 < 0$[8]: *Außerabsolute Parabel, ausschließend* (Fig. 13).

15. Bei der Gleichung ($\mathrm{I}a_3$) kann auch noch der Fall $\varrho_2 = \varrho_1$ eintreten. Sie lautet dann

$$\varrho_1 \cdot x \mid x - \varrho'(\sqrt{-\varkappa}\,x_2 - x_3)^2 = 0$$

und stellt den *Grenzkreis* mit der absoluten Tangente $\sqrt{-\varkappa}\,x_2 - x_3 = 0$ dar, der mit dem AK vier zusammmenfallende Punkte $(0 \mid 1 \mid \sqrt{-\varkappa})$ gemein hat. Schließlich fragt sich wieder, welche Bedingungen für die Größen φ und t der Nr. 1 und 2 sich einstellen, damit die Parabeln oder der Grenzkreis eintreten.

Im Falle der Parabeln sind keine besonderen Bedingungen nötig. Sie unterstellen sich ganz dem Falle $\varrho_1 \neq \varrho_2 = \varrho_3$ der Nr. 10.

Der Fall des Grenzkreises aber unterstellt sich dem Falle $\varrho_1 = \varrho_2$ der Nr. 10, nur daß jetzt $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ ist, also $\dfrac{b_{11} + b_{22}}{(-\varkappa)\,b_{33}} = 1$ wird.

§ 7. Die oskulierende Parabel.

16. Überblickt man die bisher erhaltenen Schnittfiguren des allgemeinen Kegelschnittes $f(x) = 0$ und des AK $x \mid x = 0$, so erhält man folgende 4 Fälle:

1. *Fall*: 4 verschiedene Schnittpunkte: Mittelpunktskegelschnitte ohne Kreis und Abstandslinie, sowie Semihyperbel;
2. *Fall*: 2 verschiedene Schnittpunkte und 1 Berührpunkt: Parabeln ohne Grenzkreis;
3. *Fall*: 2 verschiedene Berührpunkte: Kreis und Abstandslinie;
4. *Fall*: 1 einziger Berührpunkt (Hyperoskulationspunkt), gleichwertig 4 Schnittpunkten: Grenzkreis.

---

[7]) Daraus folgt $\varrho'\varrho_2 \cdot \varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1) < 0$ und daraus wegen $\varrho_1\varrho_2 - \varrho_1^2 < 0$ sofort $\varrho'\varrho_2 > 0$.

[8]) Daraus folgt $\varrho'\varrho_2 \cdot \varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1) > 0$ und daraus wegen $\varrho_1\varrho_2 - \varrho_1^2 < 0$ sofort $\varrho'\varrho_2 < 0$.

Hier fehlt noch der

5. *Fall*: 1 Schnittpunkt und 1 einziger Berührpunkt (Oskulationspunkt), gleichwertig 3 Schnittpunkten.

In diesem Fall besitzt der Kegelschnitt sicher keine Symmetrieachse, also auch nicht die Normalform (I). Weiter ist vermutlich $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$. Erinnert man sich an Nr. 10, so ist zwar $-\Delta'(\varrho_1) = \varkappa(B_{11} + B_{22}) + B_{33} = 0$, aber vermutlich $B_{33} \neq 0$.

Das wollen wir nun beweisen und eine Normalform für die Gleichung dieses Kegelschnittes suchen, den man ganz unzweckmäßig *oskulierende Parabel* nennt (Fig. 14).

17. Die Gleichung (9) in der Gestalt (9″) der Nr. 1 bedeutet, daß der Kegelschnitt

$$\Sigma\, b_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = 0 \tag{1}$$

zerfällt. Setzt man $b_{11} \neq 0$ voraus, so folgt durch Multiplikation von (1) mit b_{11}

$$(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)^2 + B_{33}x_2^2 - 2B_{23}x_2x_3 + B_{22}x_2^2 = 0 \tag{2}$$

und daraus wegen $B_{33} \neq 0$ und $B_{22}B_{33} = B_{23}^2$

$$B_{33}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)^2 + (B_{33}x_2 - B_{23}x_3)^2 = 0. \tag{3}$$

Der Kegelschnitt zerfällt also in die beiden Geraden

$$\sqrt{-B_{33}}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) + B_{33}x_2 - B_{23}x_3 = 0 \tag{4_1}$$

und

$$-\sqrt{-B_{33}}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) + B_{33}x_2 - B_{23}x_3 = 0, \tag{4_2}$$

und diese treffen den AK in seinen Schnittpunkten mit dem gegebenen Kegelschnitt.

Wir behaupten nun, daß im Oskulationsfalle eine der Geraden beide Kegelschnitte berührt und zwar in dem Schnittpunkt $(y_1 \mid y_2 \mid y_3)$ der beiden Geraden. Zunächst ist $(y_1 \mid y_2 \mid y_3)$ nach (8) der Nr. 1 gemeinsamer Pol der beiden Kegelschnitte, seine Polare also gemeinsame Polare. Liegt $(y_1 \mid y_2 \mid y_3)$ auf ihr, so ist sie gemeinsame Tangente beider Kegelschnitte. Andererseits gilt für den Schnittpunkt von (4_1) und (4_2)

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = 0,\ B_{33}x_2 - B_{23}x_3 = 0 \text{ oder}$$
$$b_{11}(b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + b_{32}x_3) - b_{12}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) = 0,$$

d. h. es ist der Punkt $(y_1 \mid y_2 \mid y_3)$.

Nun ist die Gleichung der Polaren von y in bezug auf den AK

$$\varkappa(y_1x_1 + y_2x_2) + y_3x_3 = 0. \tag{5}$$

Sie ist Tangente, wenn

$$\varkappa(y_1^2 + y_2^2) + y_3^2 = 0$$

oder nach (12) der Nr. 1

$$\varkappa(B_{13}^2 + B_{23}^2) + B_{33}^2 = 0 \tag{*}$$

ist. Da aber $B_{13}^2 = B_{11}B_{33}$, $B_{23}^2 = B_{22}B_{33}$ und jedenfalls $-\Delta'(\varrho_1) = \varkappa(B_{11} + B_{22}) + B_{33} = 0$ ist, so ist (*) erfüllt. Die Gleichung der Tangente (5) lautet also

$$\varkappa(B_{13}x_1 + B_{23}x_2) + B_{33}x_3 = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichung muß mit einer der Gleichungen (4) identisch sein, d. h. es müssen mit dem Proportionalitätsfaktor σ die Gleichungen

$$\begin{cases} \varepsilon\sqrt{-B_{33}}\,b_{11} = \sigma\varkappa B_{13} \\ \varepsilon\sqrt{-B_{33}}\,b_{12} + B_{33} = \sigma\varkappa B_{23} \\ \varepsilon\sqrt{-B_{33}}\,b_{13} - B_{23} = \sigma\varkappa B_{33} \end{cases} \qquad (\varepsilon = +1 \text{ oder } -1) \tag{7}$$

erfüllt sein. Hier gilt nun: Sind zwei der Gleichungen erfüllt, so ist es auch die dritte. Denn Erweitern mit $(B_{13} \mid B_{23} \mid B_{33})$ gibt $0 = 0$.

Ferner sind die beiden ersten Gleichungen erfüllt, wenn — man elimiere σ —

$$\varepsilon\sqrt{-B_{33}}(b_{11}B_{23}-b_{12}B_{13})^2 = B_{33}B_{13} \tag{8}$$

ist. Nimmt man (8) als gültig an, so folgt daraus der Reihe nach — es ist $B_{33} \neq 0$ —

$$\begin{aligned}
-B_{33}(b_{11}B_{23}-b_{12}B_{13}) &= B_{33}^2B_{13}^2 = B_{33}^3B_{11}\\
(b_{11}B_{23}-b_{12}B_{13})^2+b_{13}^2B_{33}^2 &= -B_{33}^2B_{11}+b_{13}^2B_{33}^2\\
(b_{11}B_{23}-b_{12}B_{13})^2+(b_{11}B_{13}+b_{12}B_{23})^2 &= -B_{33}^2(B_{11}-b_{13}^2)\\
(B_{13}^2+B_{23}^2)(b_{11}^2+b_{12}^2) &= -B_{33}^2(B_{11}-b_{13}^2)\\
(B_{11}B_{33}+B_{22}B_{33})(b_{11}^2+b_{12}^2) &= -B_{33}^2(B_{11}-b_{13}^2)\\
\varkappa B_{33}(B_{11}+B_{22})(b_{11}^2+b_{12}^2) &= -\varkappa B_{33}^2(B_{11}-b_{13}^2),
\end{aligned}$$

oder wegen $-\Delta'(\varrho_1) = \varkappa(B_{11}+B_{22})+B_{33} = 0$

$$b_{11}^2+b_{12}^2 = \varkappa(B_{11}-b_{13}^2),$$

oder mit $b_{12}^2 = b_{11}b_{22}-B_{33}$, $b_{13}^2 = b_{11}b_{33}-B_{22}$

$$b_{11}(b_{11}+b_{22}+\varkappa b_{33}) = 0$$

und wegen $b_{11} \neq 0$

$$b_{11}+b_{22}+\varkappa b_{33} = \frac{\Delta''(\varrho_1)}{2\varkappa} = 0.$$

Also ist $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$, wenn (4_1) oder (4_2) Tangente sein soll. Ist umgekehrt $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ und durchläuft man die Gleichungskette rückwärts, so folgt (8).

Da der 5. Fall der Nr. 17 wegen der vollständigen Disjunktion der Fälle 1 bis 5 der einzige noch nicht behandelte ist, so ist mit dem ebenen Bewiesenen zugleich gezeigt, daß der Fall $\varrho_1 = \varrho_2$, $B_{44}(\varrho_1) \neq 0$ dann und nur dann eintritt, wenn $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ ist.

18. Wir haben $b_{11} \neq 0$ vorausgesetzt. Wäre $b_{11} = 0$ und b_{22} von Null verschieden, so würde Erweitern mit b_{22} oder b_{33} zum selben Ergebnisse führen. Wären aber b_{11}, b_{22}, b_{33} alle drei gleich Null, so müßte wegen $b = 0$ auch $b_{23}b_{31}b_{12} = 0$ sein. Man findet, daß $b_{12} = 0$ unmöglich ist, da die Rechnung auf einen nullteiligen Kegelschnitt führt. $b_{23} = 0$ und $b_{31} = 0$ aber führen bis auf eine Koordinatenvertauschung zum selben Ziel. Sei z. B.

$$b_{11} = 0,\ b_{22} = 0,\ b_{33} = 0,\ b_{23} = 0, \tag{^{0}}$$

so hat der zerfallende Kegelschnitt die Gleichung

$$2x_1(b_{12}x_2+b_{13}x_3) = 0$$

und es ist die gegebene Kegelschnittsgleichung

$$f(x) \equiv \varrho_1\cdot x \mid x + 2x_1(a_{12}x_1+a_{13}x_3) = 0. \tag{9}$$

Aus $\varkappa(B_{11}+B_{23})+B_{33} = 0$ folgt aber mit $(^0)$ sofort

$$a_{12}^2 = -\varkappa a_{13}^2,\ a_{12} = +\delta\sqrt{-\varkappa}\,a_{13} = +\delta\varrho'\sqrt{-\varkappa} \tag{10}$$

und damit, wenn man $\delta = -1$ wählt,

$$\varrho_1\cdot x \mid x - 2\varrho' x_1(\sqrt{-\varkappa}\,x_2 - x_3) = 0. \tag{I_3}$$

Diese Gleichung gelte als *Normalform* der Gleichung unserer Kurve.

19. Nun ist noch zu zeigen, daß die Gleichung jeder oskulierenden Parabel mittels einer Bewegung auf die Form (I_3) gebracht werden kann. Infolge der Bewegung (5) der Nr. 1 hat die Gerade $x_1 = 0$ in den ursprünglichen Koordinaten $(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ die Gleichung

$$x_1\cdot C(t)\cos\varphi + x_2\cdot C(t)\sin\varphi + x_3\cdot S(t) = 0. \tag{11_1}$$

Diese muß identisch sein mit derjenigen Gleichung (4), die *nicht* eine Parabeltangente darstellt, also gemäß (7) mit der Gleichung

$$-\varepsilon\sqrt{-B_{33}}\,b_{11}x_1 + (-\varepsilon\sqrt{-B_{33}}\,b_{12}+B_{33})x_2 + (-\varepsilon\sqrt{-B_{33}}\,b_{13}-B_{23})x_3 = 0. \tag{11_2}$$

Damit folgen mit $B_{23} = \delta\sqrt{-B_{33}}\sqrt{-B_{22}}$, $\delta = \pm 1$ die Proportionen

$$(12)\quad C(t)\cos\varphi : C(t)\sin\varphi : S(t) = b_{11} : (b_{12} + \varepsilon\sqrt{-B_{33}}) : (b_{13} + \delta\varepsilon\sqrt{-B_{22}})$$

und damit

$$(13)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b_{12} + \varepsilon\sqrt{-B_{33}}}{b_{11}},$$

$$(14)\quad T(t) = \frac{b_{13} + \delta\varepsilon\sqrt{-B_{12}}}{b_{11}}\cos\varphi = \frac{b_{13} + \delta\varepsilon\sqrt{-B_{22}}}{\sqrt{W}},\ W = b_{11}^2 + (b_{12} + \varepsilon\sqrt{-B_{33}})^2.$$

Infolge *derselben* Bewegung (5) der Nr. 1 muß nun auch die Tangente

$$(15_2)\quad \varepsilon\sqrt{-B_{33}}b_{11}x_1 + (\varepsilon\sqrt{-B_{33}}b_{12} + B_{33})\,x_2 + (\varepsilon\sqrt{-B_{33}}b_{13} - B_{23})\,x_3 = 0$$

oder

$$\varkappa B_{13}x_1 + \varkappa B_{23}x_2 + B_{33}x_3 = 0$$

in die Tangente $\bar{x}_2\sqrt{-\varkappa} - \bar{x}_3 = 0$ übergehen. Diese hat in den ursprünglichen Koordinaten die Gleichung, die sich ergibt, wenn man in den Gleichungen (5) der Nr. 1 $\bar{x}_3 = \bar{x}_2\sqrt{-\varkappa}$ setzt und ϱ, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ eliminiert, nämlich

$$\begin{vmatrix} x_1 & C(t)\cos\varphi & -(\sin\varphi + \sqrt{-\varkappa}\,S(t)\cos\varphi) \\ x_2 & C(t)\sin\varphi & \cos\varphi - \sqrt{-\varkappa}\,S(t)\sin\varphi \\ x_3 & \varkappa S(t) & \sqrt{-\varkappa}\,C(t) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(15_1)\quad (\sqrt{-\varkappa}\sin\varphi - \varkappa S(t)\cos\varphi)\,x_1 - (\sqrt{-\varkappa}\cos\varphi + \varkappa S(t)\sin\varphi)\,x_2 + C(t)\,x_3 = 0.$$

Damit (15_1) und (15_2) identisch sind, muß

$$(\sin\varphi + \sqrt{-\varkappa}\,S(t)\cos\varphi) : (-\cos\varphi + \sqrt{-\varkappa}\,S(t)\sin\varphi) : -\sqrt{-\varkappa}\,C(t) = B_{13} : B_{23} : B_{33}$$

sein. Diese Proportionen sind aber nicht unabhängig, da $(B_{13} \mid B_{23} \mid B_{33})$ auf dem AK liegt. Es folgt

$$\left\{\begin{aligned} \sin\varphi + \sqrt{-\varkappa}\,S(t)\cos\varphi &= \sigma B_{13} \\ -\cos\varphi + \sqrt{-\varkappa}\,S(t)\sin\varphi &= \sigma B_{23} \\ -\sqrt{-\varkappa}\,C(t) &= \sigma B_{33} \end{aligned}\right\} \left|\begin{matrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \end{matrix}\right.$$

und daraus $\sqrt{-\varkappa}\,S(t) = \sigma(B_{13}\cos\varphi + B_{23}\sin\varphi)$ und weiter

$$T(t) = -\frac{B_{13}\cos\varphi + B_{23}\sin\varphi}{B_{33}},$$

woraus man unter Benutzung von (13) erhält

$$T(t) = -\frac{b_{11}B_{13} + b_{12}B_{23} + \varepsilon B_{23}\sqrt{-B_{33}}}{B_{33}\sqrt{W}} = \frac{b_{13}B_{33} - \varepsilon B_{23}\sqrt{-B_{33}}}{B_{33}\sqrt{W}}$$

$$= \frac{b_{13}B_{33} - \delta\varepsilon\sqrt{-B_{13}}(\sqrt{-B_{33}})^2}{B_{33}\sqrt{W}} = \frac{b_{33} + \delta\varepsilon\sqrt{-B_{22}}}{\sqrt{W}},$$

d. h. denselben Wert für t wie oben. Damit ist unsere Behauptung bewiesen und es sind φ und t bestimmt. Der Wert von ϱ' in (10) aber bleibt unbestimmt, da (I_3) in ϱ_1 und ϱ' homogen ist.

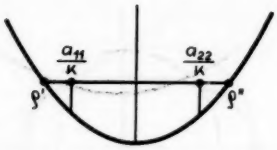

Fig. 1a

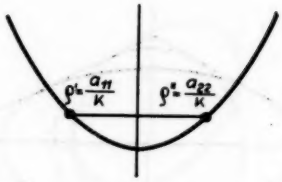

Fig. 1b

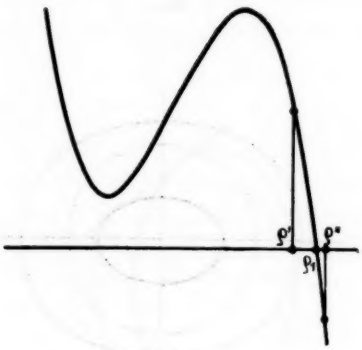

Fig. 2a

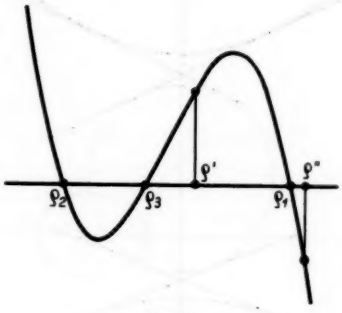

Fig. 2b

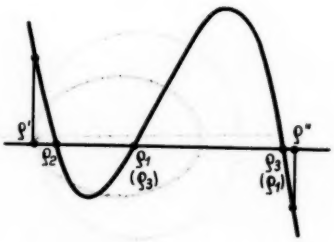

Fig. 2c

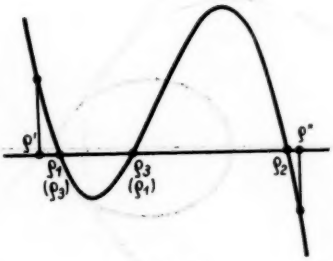

Fig. 2d

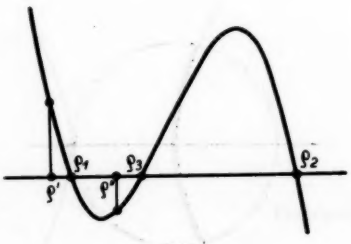

Fig. 2e

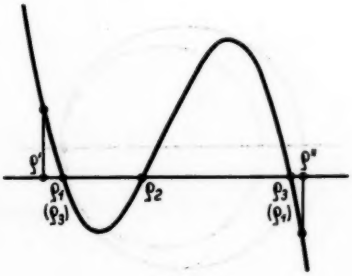

Fig. 2f

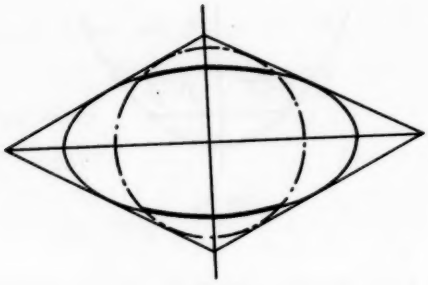

Fig. 3

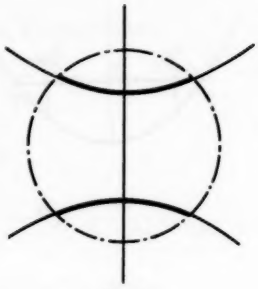

Fig. 4

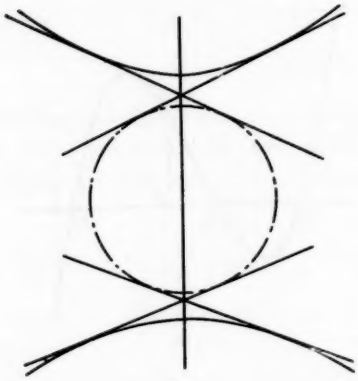

Fig. 5

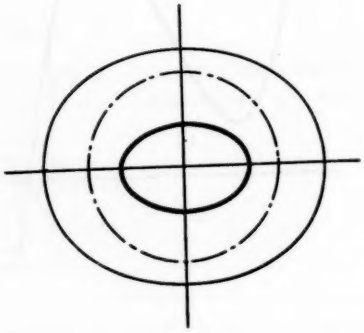

Fig. 6

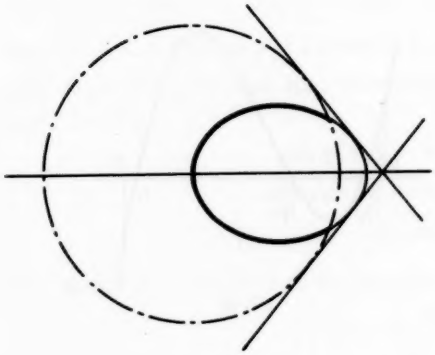

Fig. 7

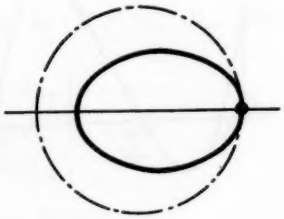

Fig. 8

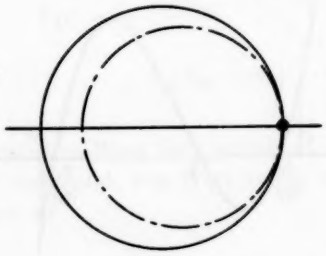

Fig. 9

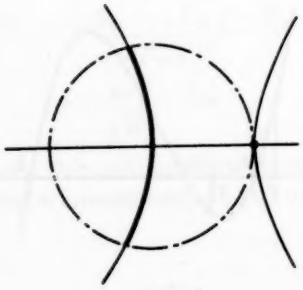

Fig. 10

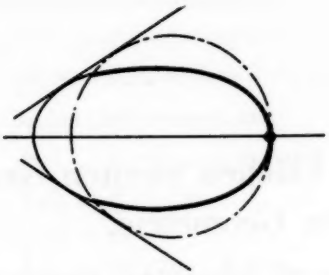

Fig. 11

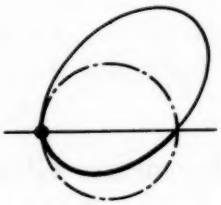

Fig. 12

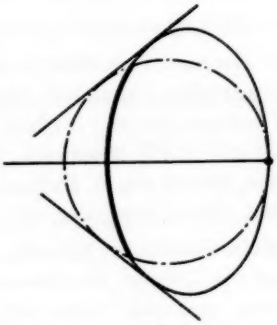

Fig. 13

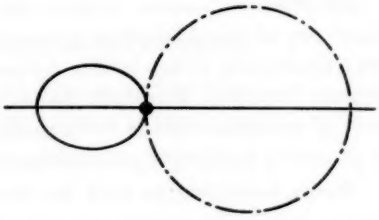

Fig. 14

Eingegangen 25. Juli 1955.

Die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades in der hyperbolischen Geometrie.

Herrn Professor Dr. Wilhelm Süß zum 60. Geburtstage gewidmet.

Von *Kuno Fladt* in Calw (Württ. Schwarzwald).

Einleitung.

Die Flächen zweiten Grades der hyperbolischen Geometrie werden in den Lehrbüchern der nichteuklidischen Geometrie[1]) sehr stiefmütterlich behandelt. Ihre Klassifikation findet sich in den beiden Abhandlungen J. L. Coolidge, *Quadric surfaces in hyperbolic space*, Transact. Am. Math. Soc. 4, 1903, p. 161—170 u. T. J. I'A. Bromwich, *The classification of quadrics*, ebda 6, 1905, p. 275—285 und in dem Buche von P. Barbarin, *Études de la géométrie analytique noneuclidienne*, Bruxelles 1901, Mém. cour. sav. étr. Acad. 60.

Weder bei Coolidge noch bei Barbarin ist die Klassifikation vollständig, dagegen in bezug auf die Hauptfälle bei Bromwich, der sie auf die Theorie der Elementarteiler gründet. Im folgenden soll die vollständige Klassifikation auch aller Nebenfälle dadurch auf elementarem Wege geleistet werden, daß wir mit Hilfe einfacher hyperbolischer Bewegungen geeignete Normalformen der Flächengleichung herstellen.

§ 1. Eine Normalform der Gleichung einer Fläche zweiten Grades.

1. Wir versuchen die Gleichung

$$(1)\quad \begin{aligned} f(x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4) = f(x) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 \\ &+ a_{22}x_2^2 \quad + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 \\ &\qquad\qquad + a_{33}x_3^2 \quad + 2a_{34}x_3x_4 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad + a_{44}x_4^2 \quad = 0 \end{aligned}$$

durch eine *Bewegung* auf die Normalform

$$(2)\qquad f(\bar{x}) = \bar{a}_{11}\bar{x}_1^2 + \bar{a}_{22}\bar{x}_2^2 + \bar{a}_{33}\bar{x}_3^2 + 2\bar{a}_{34}\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{a}_{44}x_4^2 = 0$$

zu bringen, so daß die Fläche 2. Ordnung die *zwei* Ebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ zu Symmetrieebenen hat.

Wir setzen die *Bewegung* zusammen aus einer *Drehung* um eine Achse durch den Ursprung und aus zwei *Schiebungen* längs der neuen Achse $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und der wiederum neuen Achse $x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

Die Drehung ist dargestellt durch die *orthogonale Substitution*

$$(3)\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = \alpha_1\breve{x}_1 + \beta_1\breve{x}_2 + \gamma_1\breve{x}_3 \\ \varrho x_2 = \alpha_2\breve{x}_1 + \beta_2\breve{x}_2 + \gamma_2\breve{x}_3 \\ \varrho x_3 = \alpha_3\breve{x}_1 + \beta_3\breve{x}_2 + \gamma_3\breve{x}_3 \\ \varrho x_4 = \qquad\qquad\qquad\quad \breve{x}_4 \end{cases}$$

---

[1]) Vgl. Anm. [1]) der vorstehenden Abh. des Verf., nachstehend als „Abh. I" zitiert.

mit den Koeffizientenbedingungen

$$(3')\quad \begin{cases} \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1, \qquad \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1, \qquad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1 \\ \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0,\ \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0,\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0. \end{cases}$$

Die beiden *Schiebungen* sind

$$(4)\quad \begin{cases} \varrho\breve{x}_1=\breve{\bar{x}}_1C(t)-\breve{\bar{x}}_4S(t)^{2)} \\ \varrho\breve{x}_2=x_2 \\ \varrho\breve{x}_3=\breve{\bar{x}}_3 \\ \varrho\breve{x}_4=\varkappa\breve{\bar{x}}_1S(t)+\breve{\bar{x}}_4C(t) \end{cases} \quad \text{und} \quad (5)\quad \begin{cases} \varrho\breve{\bar{x}}_1=\bar{x}_1 \\ \varrho\breve{\bar{x}}_2=\bar{x}_2C(u)-\bar{x}_4S(u) \\ \varrho\breve{\bar{x}}_3=\bar{x}_3 \\ \varrho\breve{\bar{x}}_4=\varkappa\bar{x}_2S(u)+\bar{x}_4C(u)\,. \end{cases}$$

Die Drehung und die Schiebungen ergeben zusammengesetzt die Bewegung

$$(6)\quad \begin{cases} \varrho x_1=\alpha_1C(t)\bar{x}_1+(\beta_1C(u)-\varkappa\alpha_1S(t)S(u))\bar{x}_2+\gamma_1\bar{x}_3-(\beta_1S(u)+\alpha_1S(t)C(u))\bar{x}_4 \\ \varrho x_2=\alpha_2C(t)\bar{x}_1+(\beta_2C(u)-\varkappa\alpha_2S(t)S(u))\bar{x}_2+\gamma_2\bar{x}_3-(\beta_2S(u)+\alpha_2S(t)C(u))\bar{x}_4 \\ \varrho x_3=\alpha_3C(t)\bar{x}_1+(\beta_3C(u)-\varkappa\alpha_3S(t)S(u))\bar{x}_2+\gamma_3\bar{x}_3-(\beta_3S(u)+\alpha_3S(t)C(u))\bar{x}_4 \\ \varrho x_4=\varkappa S(t)\,\bar{x}_1+\varkappa\ C(t)S(u)\ \bar{x}_2+\bar{x}_3+C(t)C(u)\ \bar{x}_4. \end{cases}$$

Die Ebene $\bar{x}_1=0$ hat in den ursprünglichen Koordinaten die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & \beta_1C(u)-\varkappa\alpha_2S(t)\,S(u) & \gamma_1-(\beta_1S(u)+\alpha_1\,S(t)\,C(u)) \\ x_2 & \beta_2C(u)-\varkappa\alpha_2S(t)\,S(u) & \gamma_2-(\beta_2S(u)+\alpha_2\,S(t)\,C(u)) \\ x_3 & \beta_3C(u)-\varkappa\alpha_3S(t)\,S(u) & \gamma_3-(\beta_3S(u)+\alpha_3\,S(t)\,C(u)) \\ x_4 & \varkappa\ C(t)\,S(u) & 0 \qquad\qquad C(t)\,C(u) \end{vmatrix}$$

oder

$$(7)\qquad \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+T(t)\,x_4=0.$$

Ihr absoluter Pol ist

$$(8)\qquad (\alpha_1\mid\alpha_2\mid\alpha_3\mid\varkappa\,T(t)).$$

Die Ebene $\bar{x}_2=0$ hat in den ursprünglichen Koordinaten die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1C(t) & \gamma_1-(\beta_1S(u)+\alpha_1S(t)C(u)) \\ x_2 & \alpha_2C(t) & \gamma_2-(\beta_2S(u)+\alpha_2S(t)C(u)) \\ x_3 & \alpha_3C(t) & \gamma_3-(\beta_3S(u)+\alpha_3S(t)C(u)) \\ x_4 & \varkappa\ S(t) & 0 \qquad\qquad C(t)C(u) \end{vmatrix}$$

oder

$$(9)\qquad \begin{aligned}(\beta_1-\varkappa S(t)\,T(u)\alpha_1)x_1+(\beta_2-\varkappa S(t)\,T(u)\alpha_2)\,x_2 \\ +(\beta_3-\varkappa S(t)\,T(u)\alpha_3)x_3+C(t)\,T(u)x_4=0.\end{aligned}$$

Ihr absoluter Pol ist

$$(10)\quad (\beta_1-\varkappa S(t)\ T(u)\,\alpha_1\mid\beta_2-\varkappa S(t)\ T(u)\,\alpha_2\mid\beta_3-\varkappa S(t)\ T(u)\,\alpha_3\mid\varkappa C(t)\ T(u)).$$

Die beiden Pole (8) und (9) müssen nun gemeinsame Pole der absoluten Fläche (AF)

$$x\mid x\equiv\varkappa(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x_4^2=0$$

und der gegebenen Fläche 2. Ordnung sein, wenn in der transformierten Gleichung die Veränderlichen $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ nur im Quadrat auftreten, diese Gleichung also von der Form (2) sein soll.

---

[2]) Es ist $C(t)=\cosh(\sqrt{-\varkappa}t)$, $S(t)=\dfrac{\sinh(\sqrt{-\varkappa}t)}{\sqrt{-\varkappa}}$, $T(t)=\dfrac{\operatorname{tangh}(\sqrt{-\varkappa}t)}{\sqrt{-\varkappa}}$, so daß $C^2(t)+\varkappa S^2(t)=1$ ist.

2. Ist y ein gemeinsamer Pol der beiden Flächen, $[\varkappa y_1 \mid \varkappa y_2 \mid \varkappa y_3 \mid y_4]$ seine absolute Polarebene, $[f_1'(y) \mid f_2'(y) \mid f_3'(y) \mid f_4'(y)]$ seine Polarebene in bezug auf die Fläche (1), so muß

$$(11) \qquad \varrho\varkappa y_1 = f_1'(y), \quad \varrho\varkappa y_2 = f_2'(y), \quad \varrho\varkappa y_3 = f_3'(y), \quad \varrho y_4 = f_4'(y)$$

sein. Daraus folgt für ϱ die *charakteristische Gleichung*

$$(12) \qquad \Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa\varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varkappa\varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varkappa\varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{aligned} (12') \quad \varkappa \cdot \Delta(\varrho) &\equiv (\varkappa\varrho)^4 - \{a_{11} + a_{22} + a_{33} + \varkappa a_{44}\}(\varkappa\varrho)^3 \\ &+ \left\{ \begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{23} a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} a_{31} \\ a_{31} a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{12} a_{22} \end{vmatrix} + \varkappa \begin{vmatrix} a_{11} a_{14} \\ a_{14} a_{44} \end{vmatrix} + \varkappa \begin{vmatrix} a_{22} a_{24} \\ a_{24} a_{44} \end{vmatrix} + \varkappa \begin{vmatrix} a_{33} a_{34} \\ a_{34} a_{44} \end{vmatrix} \right\} (\varkappa\varrho)^2 \\ &- \{\varkappa(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + A_{44}\}(\varkappa\varrho) + \varkappa a = 0. \end{aligned}$$

Es ist zweckmäßig, die Glieder der Determinante (12′) mit b_{ik} zu bezeichnen. Dann wird

$$(12'') \qquad b = 0.$$

Ist B_{ik} der zu b_{ik} gehörige algebraische Minor in b, so gilt für die zweireihigen Minoren der Determinante $\mid B_{ik} \mid = b^3$

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} B_{k_1 l_1} & B_{k_1 l_2} \\ B_{k_2 l_1} & B_{k_2 l_2} \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b_{k_3 l_3} & b_{k_3 l_4} \\ b_{k_4 l_3} & b_{k_4 l_4} \end{vmatrix},$$

wo die Indizesquadrupel $k_1 k_2$, $k_3 k_4$ und $l_1 l_2$, $l_3 l_4$ unabhängig voneinander die 6 geraden Permutationen 23, 14; 31, 24; 12, 34; 14, 23; 24, 31; 34, 12 durchlaufen.

Da aber $b = 0$ ist, so sind nach (13) alle zweireihigen Minoren von $\mid B_{ik} \mid$ gleich Null. Es ist also z. B.

$$(14) \qquad B_{14}^2 = B_{11} B_{44}, \quad B_{24}^2 = B_{22} B_{44}, \quad B_{34}^2 = B_{33} B_{44}.$$

Weiter ist

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \Delta'(\varrho) &= -\{\varkappa(B_{11} + B_{22} + B_{33}) + B_{44}\}. \\ \Delta''(\varrho) &= 2\varkappa \left\{ \begin{vmatrix} b_{22} b_{23} \\ b_{23} b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{33} b_{31} \\ b_{31} b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} \\ b_{12} b_{22} \end{vmatrix} + \varkappa \begin{vmatrix} b_{11} b_{14} \\ b_{14} b_{44} \end{vmatrix} + \varkappa \begin{vmatrix} b_{22} b_{24} \\ b_{24} b_{44} \end{vmatrix} + \varkappa \begin{vmatrix} b_{33} b_{34} \\ b_{34} b_{44} \end{vmatrix} \right\}, \\ \Delta'''(\varrho) &= -6\varkappa^2 \{b_{11} + b_{22} + b_{33} + k b_{44}\}. \end{aligned} \right.$$

Mit den Lösungen von (12) sind die Gleichungen

$$(11') \left\{ \begin{aligned} (a_{11} - \varkappa\varrho) y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + a_{14} y_4 &= 0 \\ a_{21} y_1 + (a_{22} - \varkappa\varrho) y_2 + a_{23} y_3 + a_{24} y_4 &= 0 \\ a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + (a_{33} - \varkappa\varrho) y_3 + a_{34} y_4 &= 0 \\ a_{41} y_1 + a_{42} y_2 + a_{43} y_3 + (a_{44} - \varrho) y_4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

erfüllt. Aus ihnen folgt

$$(16) \qquad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = B_{14} : B_{24} : B_{34} : B_{44}.$$

Nun hat, wie wir in Nr. 4 beweisen werden, die Gleichung (12) mindestens *zwei reelle* Wurzeln, sie kann aber auch deren vier besitzen. Wir wollen diejenigen unter ihnen, die den Polen (8) und (10) entsprechen, und die im Falle *zweier* reeller Wurzeln diese sind, mit ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnen und die zugehörigen Werte der rechten Seite von (16) mit $B_{14}^{(1)} : B_{24}^{(1)} : B_{34}^{(1)} : B_{44}^{(1)}$ und $B_{14}^{(2)} : B_{24}^{(2)} : B_{34}^{(2)} : B_{44}^{(2)}$. Dann müssen gemäß (8) und (10) die Proportionen gelten:

$$(17) \qquad \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \varkappa T(t) = B_{14}^{(1)} : B_{24}^{(1)} : B_{34}^{(1)} : B_{44}^{(1)},$$

$$\begin{aligned} (18) \quad (\beta_1 - \varkappa S(t) T(u) \alpha_1) : (\beta_2 - \varkappa S(t) T(u) \alpha_3) : (\beta_2 - \varkappa S(t) T(u) \alpha_3) : \varkappa C(t) T(u) \\ = B_{14}^{(2)} : B_{24}^{(2)} : B_{34}^{(2)} : B_{44}^{(2)} \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (14)

$$\alpha_1 = \frac{B_{14}^{(1)}}{\sqrt{B_{14}^{(1)2} + B_{24}^{(1)2} + B_{34}^{(1)2}}} = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{B_{11}^{(1)} B_{44}^{(1)}}}{\sqrt{B_{11}^{(1)} B_{44}^{(1)} + B_{22}^{(1)} B_{44}^{(1)} + B_{33}^{(1)} B_{44}^{(1)}}} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{B_{11}^{(1)}}{B_{11}^{(1)} + B_{22}^{(1)} + B_{33}^{(1)}}},$$

wenn wir der Quadratwurzel $\sqrt{B_{14}^{(1)2} + B_{24}^{(1)2} + B_{34}^{(1)2}}$ das positive Zeichen geben und mit $\varepsilon_1 = \pm 1$ das Vorzeichen von $B_{14}^{(1)}$ bezeichnen. Sind ebenso $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\varepsilon_3 = \pm 1$ die Vorzeichen von $B_{24}^{(1)}$ und $B_{34}^{(1)}$ und setzt man zur Abkürzung

$$(*) \qquad B_{11}^{(1)} + B_{22}^{(1)} + B_{33}^{(1)} = B',$$

so gilt

$$(19) \qquad \alpha_1 = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{B_{11}^{(1)}}{B'}}, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{B_{22}^{(1)}}{B'}}, \quad \alpha_3 = \varepsilon_3 \sqrt{\frac{B_{33}^{(1)}}{B'}}.$$

Weiter folgt mit

$$(20) \qquad \varkappa B' + B_{44}^{(1)} = B^{(1)}$$

$$(21) \qquad \varkappa T(t) = \varepsilon_4 \sqrt{\frac{B_{44}^{(1)}}{B'}}, \quad C(t) = \sqrt{\frac{\varkappa B'}{B^{(1)}}}, \quad \varkappa S(t) = \varepsilon_4 \sqrt{\frac{\varkappa B_{44}^{(1)}}{B^{(1)}}},$$

wo ε_4 das Vorzeichen von $B_{44}^{(1)}$ bedeutet.

Damit t reell wird, muß $\tanh^2(\sqrt{-\varkappa}\, t) = -\frac{1}{\varkappa} \frac{B_{44}^{(1)}}{B'} < 1$ oder $\frac{B_{44}^{(1)2}}{(-\varkappa) B_{44}^{(1)} B'} < 1$[3]), d. h.

$$(22) \qquad B_{44}^{(1)} B^{(1)} < 0$$

sein. Weiter ist

$$(23) \qquad \begin{cases} z_1 = \beta_1 - \varkappa S(t)\, T(u)\, \alpha_1 = \sigma B_{14}^{(2)} \\ z_2 = \beta_2 - \varkappa S(t)\, T(u)\, \alpha_2 = \sigma B_{24}^{(2)} \\ z_3 = \beta_3 - \varkappa S(t)\, T(u)\, \alpha_3 = \sigma B_{34}^{(2)} \\ z_4 = \qquad \varkappa C(t)\, T(u) \quad = \sigma B_{44}^{(2)}. \end{cases}$$

Daraus folgt wegen $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0$, $a_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$ mit (14)

$$(24) \quad z \,|\, z = \varkappa + \varkappa^2 T^2(u) = \frac{\varkappa}{C^2(u)} = \sigma^2 B_{44}^{(2)} \{\varkappa (B_{11}^{(2)} + B_{22}^{(2)} + B_{33}^{(2)}) + B_{44}^{(2)}\} = \sigma^2 B_{44}^{(2)} B^{(2)}.$$

Also muß

$$(25) \qquad B_{44}^{(2)} B^{(2)} < 0$$

sein und es ergibt sich weiter

$$(26) \qquad \frac{z_4^2}{z \,|\, z} = \varkappa C^2(t)\, S^2(u) = \frac{B_{44}^{(2)}}{B^{(2)}},$$

also mit (21)

$$(27) \qquad \begin{cases} \varkappa S(u) = \zeta \sqrt{\frac{B_{44}^{(2)} B^{(1)}}{B' B^{(2)}}}, \quad C(\mu) = \sqrt{\frac{\varkappa B' B^{(2)} - B_{44}^{(2)} B^{(1)}}{\varkappa B' B^{(2)}}}, \\ \varkappa T(u) = \zeta \sqrt{\frac{\varkappa B_{44}^{(2)} B^{(1)}}{\varkappa B' B^{(2)} - B_{44}^{(2)} B^{(1)}}}. \end{cases}$$

---

[3]) Es ist $B_{44}^{(1)} B' = B_{14}^{(1)2} + B_{24}^{(1)2} + B_{34}^{(1)2} > 0$.

Aus (23, Gleichung 4) folgt noch

$$\sigma = \frac{\varkappa C(t)\, T(u)}{B_{44}^{(2)}}, \tag{28}$$

aus (23) damit

$$\beta_1 = \varkappa S(t)\, T(u)\, \alpha_1 + \sigma B_{14}^{(2)},\ \beta_2 = \varkappa S(t)\, T(u)\, \alpha_2 + \sigma B_{24}^{(2)},\ \beta_3 = \varkappa S(t)\, T(u)\, \alpha_3 + \sigma B_{34}^{(2)} \tag{29}$$

und schließlich ist

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2,\ \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_2,\ \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \tag{30}$$

Die Normalform (2) der Flächengleichung lautet nunmehr, wenn man die Querstriche wieder wegläßt,

$$f(x) \equiv \varkappa\varrho_1 x_1^2 + \varkappa\varrho_2 x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2. \tag{2'}$$

Die Koeffizienten $\varkappa\varrho_1$ und $\varkappa\varrho_2$ ergeben sich am einfachsten durch direkte Berechnung.

§ 2. Eine Eigenschaft der charakteristischen Gleichung.

3. Wir wollen jetzt die folgende grundlegende Eigenschaft der charakteristischen Gleichung (12) der Nr. 2 beweisen:

Satz. *Die charakteristische Gleichung* (12) *der Nr. 2 besitzt mindestens zwei reelle Wurzeln.*

Beweis. 1. Wir vereinfachen zunächst die charakteristische Gleichung, indem wir durch drei „harmlose", d. h. nicht von den Wurzeln der charakteristischen Gleichung abhängige Drehungen die Glieder mit x_1x_4, x_2x_4 und x_1x_3 zum Verschwinden bringen. Wir drehen zunächst um die Achse $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ um den Winkel φ. Vermöge

$$x_1 = \breve{x}_1 \cos\varphi - \breve{x}_2 \sin\varphi,\quad x_2 = \breve{x}_1 \sin\varphi + \breve{x}_2 \cos\varphi \tag{^{0}}$$

geht Gleichung (1) der Nr. 1 über in eine Form, deren $2\breve{x}_1\breve{x}_4$-Glied den Koeffizienten $a_{14}\cos\varphi + a_{24}\sin\varphi$ hat, also wegtällt, wenn man $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{a_{14}}{a_{34}}$ wählt[4]). (1) wird dann von der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 &+ * \\ + a_{22}x_2^2 \quad + 2a_{23}x_2x_3 &+ 2a_{24}x_2x_4 \\ + a_{33}x_3^2 \quad &+ 2a_{34}x_3x_4 \\ &+ a_{44}x_4^2 \quad = 0 \end{aligned} \tag{1'}$$

Jetzt drehen wir um die neue Achse $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ um den Winkel ψ. Vermöge

$$x_2 = \breve{x}_2 \cos\psi - \breve{x}_3 \sin\psi,\ x_3 = \breve{x}_2 \sin\psi + \breve{x}_3 \sin\psi \tag{^{00}}$$

geht (1′) in eine Form über, deren $2\breve{x}_2\breve{x}_4$-Glied den Koeffizienten $a_{24}\cos\psi + a_{34}\sin\psi$ hat, also verschwindet, wenn man $\operatorname{tg}\psi = -\dfrac{a_{24}}{a_{34}}$ wählt. (1′) erhält dann die Gestalt

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 &+ * \\ + a_{22}x_2^2 \quad + 2a_{23}x_2x_3 &+ * \\ + a_{33}x_3^2 \quad &+ 2a_{34}x_3x_4 \\ &+ a_{44}x_4^2 \quad = 0. \end{aligned} \tag{1''}$$

Endlich drehen wir um die neue Achse $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ um den Winkel χ. Vermöge

$$x_1 = \breve{x}_1 \cos\chi - \breve{x}_2 \sin\chi,\quad x_2 = \breve{x}_1 \sin\chi + \breve{x}_2 \cos\chi \tag{^{000}}$$

[4]) Der Leser überlege selbst den Fall $a_{24} = 0$ und entsprechend später.

geht (1″) über in eine Form, deren $2\breve{x}_1\breve{x}_3$-Glied den Koeffizienten $a_{23}\sin\chi + a_{31}\cos\chi$ hat, also verschwindet, wenn man $\operatorname{tg}\chi = -\dfrac{a_{31}}{a_{23}}$ wählt. So erhält man die Gestalt der Flächengleichung

$$(\bar{1})\quad f(x) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0$$

mit der neuen, einfacheren charakteristischen Gleichung

$$(\overline{12})\qquad \Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\varkappa\varrho & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22}-\varkappa\varrho & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{33}-\varkappa\varrho & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44}-\varrho \end{vmatrix}.$$

2. Wir behaupten nun, daß die Wurzeln von $(\overline{12})$ keine anderen sind als diejenigen der Gleichung (12). Das folgt aus dem schon in Abh. I, Nr. 3 bewiesenen

Hilfssatz. *Die charakteristische Gleichung ist gegenüber jeder Bewegung invariant.*

3. Nun beweisen wir unsern Satz, indem wir zeigen, daß die Gleichung $(\overline{12})$ oder, nach Laplace entwickelt, die Gleichung

$$(\overline{12}')\quad \Delta(\varrho) \equiv \{(a_{11}-\varkappa\varrho)(a_{22}-\varkappa\varrho) - a_{12}^2\}\{(a_{33}-\varkappa\varrho)(a_{44}-\varrho) - a_{34}^2\} + a_{23}^2(a_{11}-\varkappa\varrho)(\varrho - a_{44}) = 0$$

mindestens *zwei reelle* Wurzeln besitzt. Dieser Beweis stammt von dem Altmeister der analytischen Geometrie, Prof. emer. *Dr. Karl Kommerell* in Tübingen.

Ist $a_{23} = 0$, so ergibt die erste geschweifte Klammer in $(\overline{12}')$ gleich Null gesetzt zwei reelle Wurzeln, da sie eine Säkulargleichung ist. Die zweite geschweifte Klammer hat die Diskriminante $(a_{33} - \varkappa a_{44})^2 + 4\varkappa a_{34}^2$, die wegen $\varkappa < 0$ bei genügend großen $|a_{34}|$ sicher negativ wird.

Ist $a_{23} \neq 0$, so ist jedenfalls $\Delta(-\infty) = -$ und $\Delta(+\infty) = -$. Könnten wir beweisen, daß an irgendeiner Stelle ϱ_0 die Gleichung $(\overline{12}')$ $\Delta(\varrho_0) = +$ ist, so müßte zwischen $-\infty$ und ϱ_0 und ebenso zwischen ϱ_0 und $+\infty$ mindestens *eine* reelle Wurzel von $\Delta(\varrho) = 0$ liegen und der Satz wäre bewiesen. Wir führen die drei Funktionen

$$(\dagger\dagger)\quad Y_1 = (a_{11}-\varkappa\varrho)(a_{22}-\varkappa\varrho) - a_{12}^2 \equiv h_1(\varrho),\quad Y_2 = (a_{33}-\varkappa\varrho)(a_{44}-\varrho) - a_{34}^2 \equiv h_2(\varrho),$$
$$Y_3 \equiv (a_{11}-\varkappa\varrho)(\varrho - a_{44}) \equiv h_3(\varrho)$$

ein, so daß

$$(\dagger\dagger\dagger)\qquad \Delta(\varrho) = Y_1Y_2 + Y_3$$

ist.

Wir zeichnen nun in einem rechtwinkligen Koordinatensystem $\varrho \mid Y$ die beiden Parabeln $Y_1 = h_1(\varrho)$ und $Y_3 = h_3(\varrho)$. [Vgl. Fig. 1, in welcher der Fall $a_{44} < \dfrac{a_{11}}{\varkappa} < \dfrac{a_{22}}{\varkappa}$ gezeichnet ist[5]). In jedem andern Fall, auch bei Gleichheit zweier oder mehr der drei Größen a_{44}, $\dfrac{a_{11}}{\varkappa}$, $\dfrac{a_{22}}{\varkappa}$ führen dieselben Überlegungen zum Ziel.]

Beide Parabeln haben ihre Achsen parallel zur Y-Achse und sind *nach oben geöffnet.* Die Parabel $Y_3 = h_3(\varrho)$ schneidet die ϱ-Achse in den Punkten $(a_{44} \mid 0)$ und $(\dfrac{a_{11}}{\varkappa} \mid 0)$. Die Funktion $h_1(\varrho)$ nimmt für $\varrho = \dfrac{a_{11}}{\varkappa}$ und $\varrho = \dfrac{a_{22}}{\varkappa}$ den negativen Wert $-a_{12}^2$ an. Die

[5]) Die Figuren sind auf besonderen Seiten am Schlusse der Abhandlung zusammengestellt.

Parabel $Y_1 = h_1(\varrho)$ schneidet daher die ϱ-Achse in zwei reellen Punkten N und N', von denen der eine, etwa N *außerhalb der Strecke* $\overline{a_{44}\frac{a_{11}}{\varkappa}}$ liegt. Ist ϱ_0 seine Abszisse, so ist also $h_1(\varrho_0) = 0$, $h_3(\varrho) > 0$ und damit auch $\Delta(\varrho_0) = h(\varrho_0) > 0$, q. e. d.

§ 3. Die Möglichkeit der Normalform für $\varkappa < 0$.

4. Auch diese Untersuchung führen wir berechtigterweise mittels der vereinfachten Gleichungen $(\overline{1})$ und $(\overline{12})$ durch.

Die charakteristische Gleichung $(\overline{12})$ hat entweder 2 oder 4 reelle Wurzeln. *Sie seien zunächst als verschieden vorausgesetzt.*

Im 1. Falle können nur sie die in Nr. 2 benutzten Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 sein und es bleibt zu beweisen, daß sie die beiden Bedingungen

$$(22)\quad B_{44}^{(1)} B^{(1)} < 0 \quad \text{und} \quad (25)\quad B_{44}^{(2)} B^{(2)} < 0$$

der Nr. 2 erfüllen. Im 2. Falle sind unter den vier reellen Wurzeln zwei so auszuwählen und mit ϱ_1 und ϱ_2 zu bezeichnen, daß für sie (22) und (25) erfüllt sind.

Nun ist nach (15) der Nr. 2

$$(36)\qquad \Delta'(\varrho) = -B$$

und nach $(\overline{12})$

$$(37)\qquad B_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa\varrho & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} - \varkappa\varrho & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} - \varkappa\varrho \end{vmatrix}.$$

Sind $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ die Wurzeln von $(\overline{12})$, so ist

$$(38)\quad \begin{cases} \Delta(\varrho) = \varkappa^3(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_3)(\varrho - \varrho_4), & \Delta'(\varrho_1) = \varkappa^3(\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_3)(\varrho_1 - \varrho_4), \\ & \Delta'(\varrho_2) = \varkappa^3(\varrho_2 - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_3)(\varrho_2 - \varrho_4). \end{cases}$$

Damit verwandeln sich wegen $\varkappa < 0$ die Bedingungen (22) und (25) in

$$(22')\quad B_{44}^{(1)}(\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_3)(\varrho_1 - \varrho_4) < 0 \quad \text{und} \quad (25')\quad B_{44}^{(2)}(\varrho_2 - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_3)(\varrho_2 - \varrho_4) < 0.$$

Sind ϱ_3 und ϱ_4 imaginär, $\varrho_3 = \bar{\varrho} + \bar{\bar{\varrho}}i$, $\varrho_4 = \bar{\varrho} - \bar{\bar{\varrho}}i$, so sind

$$(\varrho_1 - \varrho_3)(\varrho_1 - \varrho_4) = (\varrho_1 - \bar{\varrho})^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2 > 0 \quad \text{und} \quad (\varrho_2 - \varrho_3)(\varrho_2 - \varrho_4) = (\varrho_2 - \bar{\varrho})^2 + \bar{\bar{\varrho}}^2 > 0.$$

Also gehen (22′) und (25′) über in

$$(22'')\quad B_{44}^{(1)}(\varrho_1 - \varrho_2) < 0 \quad \text{und} \quad (25'')\quad B_{44}^{(2)}(\varrho_2 - \varrho_1) < 0.$$

5. Die Gleichung

$$(39)\qquad B_{44} = V(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa\varrho & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} - \varkappa\varrho & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} - \varkappa\varrho \end{vmatrix}$$

$$= (a_{33} - \varkappa\varrho) \begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa\varrho & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \varkappa\varrho \end{vmatrix} - a_{23}^2(a_{11} - \varkappa\varrho) = 0$$

ist nun eine Säkulargleichung, besitzt also die reellen Wurzeln $\varrho', \varrho'', \varrho'''$.

1. *Unterfall*: $\varrho' < \varrho'' < \varrho'''$. Dann ist $V(-\infty) = -$, $V(\varrho') = 0$, $V(\varrho'') = 0$, $V(\varrho''') = 0$, $V(+\infty) = +$. Die Kurve $z = V(\varrho)$ ist eine Parabel 3. Ordnung (Fig. 2). Nun ist $V\left(\frac{a_{11}}{\varkappa}\right) = a_{12}^2(a_{11} - a_{33})$, $V\left(\frac{a_{33}}{\varkappa}\right) = -a_{23}^2(a_{11} - a_{33})$. Sei nun z. B. $a_{11} > a_{33}$[6]),

[6]) Der Fall $a_{11} = a_{33}$ stellt sich weiter unten ein.

so ist $\frac{a_{11}}{\varkappa} < \frac{a_{33}}{\varkappa}$. Dann ist $V\left(\frac{a_{11}}{\varkappa}\right) > 0$, $V\left(\frac{a_{33}}{\varkappa}\right) < 0$, also muß $\varrho' < \frac{a_{11}}{\varkappa} < \varrho'' < \varrho'''$ und $\varrho' < \varrho'' < \frac{a_{33}}{\varkappa} < \varrho'''$ sein.

Weiter ist $\varkappa\varrho' > a_{11}$, $a_{11} - \varkappa\varrho' < 0$, $\varkappa\varrho'' < a_{11}$, $a_{11} - \varkappa\varrho'' > 0$, $\varkappa\varrho''' < a_{11}$, $a_{11} - \varkappa\varrho''' > 0$; $\varkappa\varrho' > a_{33}$, $a_{33} - \varkappa\varrho' < 0$, $\varkappa\varrho'' > a_{33}$, $a_{33} - \varkappa\varrho'' < 0$, $\varkappa\varrho''' < a_{33}$, $a_{33} - \varkappa\varrho'' > 0$. Nun ist

$$(40) \qquad b = \Delta(\varrho) = (a_{44} - \varrho)\, V(\varrho) - a_{34}^2 \begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa\varrho & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \varkappa\varrho \end{vmatrix}.$$

Für $\varrho = \varrho', \varrho'', \varrho'''$ ist $V(\varrho) = 0$, also nach (39)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa\varrho & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \varkappa\varrho \end{vmatrix} = a_{23}^2 \frac{a_{11} - \varkappa\varrho}{a_{22} - \varkappa\varrho}$$

und damit

$$(41) \qquad b = \Delta(\varrho) = -a_{23}^2 a_{34}^2 \frac{a_{11} - \varkappa\varrho}{a_{33} - \varkappa\varrho}.$$

Daher gilt $\Delta(-\infty) = -$, $\Delta(\varrho') = -$, $\Delta(\varrho'') = +$, $\Delta(\varrho''') = -$, $\Delta(+\infty) = -$. Hat also $\Delta(\varrho) = 0$ *zwei* reelle Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 (Fig. 3a), so ist

$$\varrho' < \varrho_1 < \varrho'', \quad \varrho'' < \varrho_2 < \varrho'''\,^{7)}.$$

Es ist (Fig. 2) $V(\varrho_1 > 0$, $V(\varrho_2) < 0$, $\varrho_1 < \varrho_2$; also gelten in der Tat (22″) und (25″).

Hat aber $\Delta(\varrho) = 0$ *vier* reelle Wurzeln[8]), so sind die Fig. 3b bis e möglich, es ist wieder $\varrho' < \varrho_1 < \varrho''$, $\varrho'' < \varrho_2 < \varrho'''$, $V(\varrho_1) > 0$, $V(\varrho) < 0$, $\varrho_1 < \varrho_2$ und es gelten (22′) und (25′).

ϱ_1 und ϱ_2 sind dabei entweder die beiden größten oder die beiden kleinsten oder die größte und die kleinste Wurzel von $\Delta(\varrho_2) = 0$.

2. *Unterfall*: Unter den $\varrho', \varrho'', \varrho'''$ sind gleiche. Dann ist außer

$$(39) \quad V(\varrho) \equiv (a_{11} - \varkappa\varrho)(a_{22} - \varkappa\varrho)(a_{33} - \varkappa\varrho) - a_{12}^2(a_{33} - \varkappa\varrho) - a_{23}^2(a_{11} - \varkappa\varrho) = 0$$

auch

$$(41) \quad -\frac{1}{\varkappa} V'(\varrho) \equiv (a_{22} - \varkappa\varrho)(a_{33} - \varkappa\varrho) + (a_{33} - \varkappa\varrho)(a_{11} - \varkappa\varrho) + (a_{11} - \varkappa\varrho)(a_{22} - \varkappa\varrho) - a_{12}^2 - a_{23}^2 = 0.$$

Aus (39) folgt

$$(a_{22} - \varkappa\varrho)(a_{33} - \varkappa\varrho) = a_{12}^2 \frac{a_{33} - \varkappa\varrho}{a_{11} - \varkappa\varrho} + a_{23}^2$$

und

$$(a_{11} - \varkappa\varrho)(a_{22} - \varkappa\varrho) = a_{12}^2 + a_{23}^2 \frac{a_{11} - \varkappa\varrho}{a_{33} - \varkappa\varrho}$$

und damit aus (41)

$$(42) \quad a_{12}^2(a_{33} - \varkappa\varrho)^2 + (a_{33} - \varkappa\varrho)^2(a_{11} - \varkappa\varrho)^2 + a_{23}^2(a_{11} - \varkappa\varrho)^2 = 0.$$

Da alle Größen reell sein müssen, so muß also

$$(43) \quad a_{12}(a_{33} - \varkappa\varrho) = 0, \; (a_{33} - \varkappa\varrho)(a_{11} - \varkappa\varrho) = 0, \; a_{23}(a_{11} - \varkappa\varrho) = 0$$

sein. Daraus folgt entweder (a) $a_{12} = 0$, $a_{11} - \varkappa\varrho = 0$ oder (b) $a_{23} = 0$, $a_{33} - \varkappa\varrho = 0$ oder (c) $a_{11} - \varkappa\varrho = 0$, $a_{33} - \varkappa\varrho = 0$.

---

[7]) Die Annahme $\varrho_1 < \varrho_2$ ist erlaubt, denn ϱ_1 und ϱ_2 sind vertauschbar, da x_1 und x_2 vertauschbar sind.

[8]) Die Vertauschung von ϱ_3 und ϱ_4 ändert nichts.

(a) Dann muß

$\varrho' = \frac{a_{11}}{\varkappa}$ und nach (41) $-\frac{1}{\varkappa} V'(\varrho') = (a_{22} - \varkappa\varrho')(a_{33} - \varkappa\varrho') - a_{23}^2 = 0$, also

$$(a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33}) - a_{23}^2 = 0 \tag{44}$$

sein, d. h. es ist $\varrho' = \varrho'' = \frac{a_{11}}{\varkappa}$.

Weiter ist $V(\varrho) = (a_{11} - \varkappa\varrho)\{(a_{22} - \varkappa\varrho)(a_{33} - \varkappa\varrho) - a_{23}^2\}$ und unter Benutzung von (44)

$$V(\varrho) = (a_{11} - \varkappa\varrho)^2 (a_{22} + a_{33} - a_{11} - \varkappa\varrho),$$

also ist

$$\varrho''' = \frac{a_{22} + a_{33} - a_{11}}{\varkappa}, \quad V(\varrho') = 0, \quad V(\varrho''') = 0.$$

Damit ist

$$b = \Delta(\varrho) = (a_{11} - \varkappa\varrho)\,[(a_{44} - \varrho)(a_{11} - \varkappa\varrho)(a_{22} + a_{33} - a_{11} - \varkappa\varrho) - a_{34}^2(a_{22} - \varkappa\varrho)],$$

$$\Delta(\varrho) = \Delta(\varrho'') = \Delta\left(\frac{a_{11}}{\varkappa}\right) = 0, \text{ also } \varrho_1 = \varrho' = \varrho'',$$

$$\Delta(\varrho''') = -a_{34}^2(a_{11} - a_{33})(a_{11} - a_{22} + a_{11} - a_{33})$$

und unter Benutzung von (44)

$$\Delta(\varrho''') = -a_{23}^2 a_{34}^2 - a_{34}^2(a_{11} - a_{33})^2 < 0,$$

$$\Delta'(\varrho') = -\varkappa a_{34}^2(a_{11} - a_{22}) \neq 0,$$

da für $a_{11} = a_{22}$ oder $a_{34} = 0$ die Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ eine Doppelwurzel hätte.

Ist nun z. B. $\varrho' < \varrho'''$, so ist $\Delta(-\infty) = -$, $\Delta(\varrho') = 0$, $\Delta(\varrho''') = -$. Es gelten die Fig. 4 für $z = V(\varrho)$, die Fig. 5a bis d für $z = \Delta(\varrho)$.

Stets liegt eine Wurzel ϱ_2 zwischen ϱ_1 und ϱ''' und nicht zwischen ϱ_3 und ϱ_4. Dann ist $V(\varrho_2) < 0$, $\varrho_2 - \varrho_1 > 0$ und es ist (25′) bzw. (25″) erfüllt. Es ist $t = 0$.

(b) Man vertausche die Ziffern 1 und 3.

(c) $\varrho' = \frac{a_{11}}{\varkappa} = \frac{a_{33}}{\varkappa}$. Es wird $V'(\varrho) = -2(a_{11} - \varkappa\varrho)^2 + a_{12}^2 + a_{23}^2$, $V'(\varrho') = a_{12}^2 + a_{23}^2 = 0$, d. h. $a_{12} = 0$, $a_{23} = 0$, $V(\varrho) = (a_{11} - \varkappa\varrho)^2(a_{22} - \varkappa\varrho)$, $\varrho''' = \frac{a_{22}}{\varkappa}$, $V(\varrho') = 0$, $V(\varrho''') = 0$,

$$b = \Delta(\varrho) = (a_{11} - \varkappa\varrho)(a_{22} - \varkappa\varrho)\{(a_{44} - \varrho)(a_{11} - \varkappa\varrho) - a_{34}^2\},$$

$$\Delta(\varrho') = 0, \quad \Delta(\varrho''') = 0, \quad \varrho' = \varrho_1, \quad \varrho''' = \varrho_2.$$

Die Schubstrecken t und u werden beide Null.

Das Ergebnis läßt sich zusammenfassen in den

Satz. *Hat die charakteristische Gleichung vier verschiedene Wurzeln, so lassen sich stets zwei von ihnen, ϱ_1 und ϱ_2, so bestimmen, daß die Bewegung* (5) *durchführbar und die gewünschte Normalform herstellbar ist.*

§ 4. Die Untersuchung der Normalform für $\varkappa < 0$.

6. Wir wollen in diesem Paragraphen die erhaltene Normalform (2′) der Nr. 2 in anderer Gestalt schreiben, indem wir alle Fußnummern um 1 verkleinern:

$$f(x) = \varkappa(\varrho_0 x_0^2 + \varrho_1 x_1^2) + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0. \tag{1}$$

Jetzt ist klar, daß wir diese Normalform genau so weiter behandeln können wie die Normalform der Kegelschnittsgleichung in den Nrn. 3, 4, 11, 12 von Abh. I. Nur ist

die Schubstrecke nicht mit u, sondern etwa mit v zu bezeichnen. Die Schiebung ist aber nur dann möglich, wenn

$$(2_1) \qquad \Delta = (a_{22} - \varkappa a_{33})^2 + 4\varkappa a_{23}^2 > 0$$

ist und führt dann (Nr. 4 von I) auf die einfachere Normalform

$$(1_1) \qquad \varkappa(\varrho_0 x_0^2 + \varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2) + \varrho_3 x_3^2 = 0$$

der *Mittelpunktsfläche 2. Grades*, die wir in § 5 näher untersuchen werden. Ist aber $\Delta \leqq 0$, so ist die Schiebung nicht möglich. Sei zuerst

$$(2_2) \qquad \Delta < 0,$$

dann führen wir eine andere solche Schiebung aus, daß der innerabsolute Schnittpunkt der Achse $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ mit der Fläche (1) Ursprung wird (Nr. 11 von I) und erhalten so die Normalform

$$(1_2) \qquad \varkappa(\varrho_0 x_0^2 + \varrho_1 x_1^2) + (a_{22} + \varkappa a_{33})\, x_2^2 + 2\delta \sqrt{a_{23}^2 - a_{22} a_{33}}\, x_2 x_3 = 0$$

der *Semihyperboloide*, die wir in § 7 näher untersuchen werden. Ist endlich

$$(2_3) \qquad \Delta = 0,$$

so ist die Fläche (Nr. 12 von I) eine solche, welche die AF im Punkt $(0|1|\sqrt{-\varkappa})$ berührt und die Normalform

$$(1_3) \qquad \varkappa(\varrho_0 x_0^2 + \varrho_1 x_1^2) + \varrho_2(\varkappa x_2^2 + x_3^2) - \varrho'(\sqrt{-\varkappa}\, x_2 - x_3)^2 = 0$$

besitzt. Sie stellt eine erste Reihe von *Paraboloiden* vor, die wir in § 8 näher untersuchen werden.

Kehren wir zu den ursprünglichen Fußnummern zurück, so können wir das Ergebnis zusammenfassen in dem

Satz. *Die Normalform*

$$(\mathrm{I}) \qquad \varkappa(\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2) + a_{33} x_3^2 + 2a_{34} x_3 x_4 + a_{44} x_4^2 = 0$$

einer Fläche 2. Grades, läßt sich, je nachdem die Größe

$$(*) \qquad \Delta = (a_{33} - \varkappa a_{44})^2 + 4\varkappa a_{34}^2 \gtreqless 0$$

ist, in die Formen

$$(\mathrm{I}_1) \quad \varkappa(\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 x_3^2) + \varrho_4 x_4^2 = 0,$$

$$(\mathrm{I}_2) \quad \varkappa(\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2) + (a_{33} + \varkappa a_{44})\, x_3^2 + 2\delta \sqrt{a_{34}^2 - a_{33} a_{44}}\, x_3 x_4 = 0,$$

$$(\mathrm{I}_3) \quad \varkappa(\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 x_3^2) + \varrho_3 x_4^2 - \varrho' \sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4)^2 = 0$$

überführen, von denen die erste die Mittelpunktsfläche 2. Grades, die zweite die Semihyperboloide, die dritte eine erste Reihe von Paraboloiden darstellt.

§ 5. Die Mittelpunktsflächen für $\varkappa < 0$.

7. Wir diskutieren um die *Mittelpunktsflächen* 2. Grades

$$(\mathrm{I}a_1) \qquad \varkappa(\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \varrho_2 x_3^2) + \varrho_4 x_4^2 = 0, \quad \varrho_1 \neq \varrho_2 \neq \varrho_3 \neq \varrho_4,$$

der hyperbolischen Geometrie mit dem *einen* eigentlichen *Mittelpunkt* $(0|0|0|1)$. Eine Fläche $(\mathrm{I}a_1)$ bestimmt mit der absoluten Fläche $x|x = 0$ als gemeinsamen Schnitt eine sog. *Raumkurve 4. Ordnung 1. Art*, die von einer Ebene „im allgemeinen" in 4 Punkten geschnitten wird. Durch diese Raumkurve gehen auch 4 Kegel zweiter Ordnung, die wir die *Mittelpunktskegel* der Fläche $(\mathrm{I}a_1)$ nennen, da ihre Spitzen die 4 Flächenmittelpunkte sind.

Die Kegelgleichungen und -spitzen sind folgende:

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Kegelgleichung} \qquad\qquad\qquad\

Satz 3. *Raumkurven und Torse sind beide nullteilig in folgenden drei Fällen:* $0 < \varrho_4 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$, $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < 0 < \varrho_4$, $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_4$.

Satz 4. *Die Raumkurve ist nullteilig, die Torse nichtnullteilig in folgenden zwei Fällen:* $\varrho_1 < 0 < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_4$, $\varrho_1 < \varrho_2 < 0 < \varrho_3 < \varrho_4$.

8. Die einzelnen Fälle sind nun der Reihe nach

1. Fall: $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_4 < \varrho_3$: Konkaves zweimanteliges nicht geradliniges Hyperboloid.

2. Fall: $0 < \varrho_1 < \varrho_4 < \varrho_2 < \varrho_3$: Konkaves einmanteliges nicht geradliniges Hyperboloid.

3. Fall: $\varrho_1 < 0 < \varrho_2 < \varrho_4 < \varrho_3$: Konvexes zweimanteliges geradliniges Hyperboloid.

4. Fall: $\varrho_1 < 0 < \varrho_4 < \varrho_2 < \varrho_3$: Konvexes einmanteliges geradliniges Hyperboloid.

5. Fall: $\varrho_1 < \varrho_2 < 0 < \varrho_4 < \varrho_3$: Konvexes zweimanteliges nicht geradliniges Hyperboloid.

6. Fall: $0 < \varrho_4 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$: Ellipsoid.

7. Fall: $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < 0 < \varrho_4$: Nullteilige Fläche (nullteiliges Ellipsoid).

8. Fall: $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_4$: Außerabsolute nichtgeradlinige Fläche, umschließend (ideales Ellipsoid).

9. Fall: $\varrho_1 < 0 < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_4$: Außerabsolute geradlinige Fläche, umschließend (ideales einmanteliges Hyperboloid).

10. Fall: $\varrho_1 < \varrho_2 < 0 < \varrho_3 < \varrho_4$: Außerabsolute nicht geradlinige Fläche, ausschließend (ideales zweimanteliges Hyperboloid).

Ein zutreffendes Bild aller dieser Flächen macht man sich am einfachsten, wenn man die *hyperbolische Geometrie* auf die *euklidische* abbildet, indem man $x_4 = 0$ als uneigentliche Ebene und für $(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ rechtwinklige Cartesische Koordinaten wählt. Dann ist die AF eine Kugel mit Radius $\frac{1}{\sqrt{-\varkappa}}$, die gegebene Fläche eine solche mit gleichem Mittelpunkt und gleichen Symmetrieebenen. Sie ist insoweit ein „endliches" Abbild der Fläche 2. Grades der hyperbolischen Geometrie, als sie ins *Innere* der AF fällt. Die Konstruktion der Schrägbilder und damit die Einzeldiskussion der 10 Flächen, auf die wir hier verzichten müssen, ist sehr lehrreich[9]).

9. Weitere Mittelpunktsflächen erhält man, wenn mindestens zwei der Werte ϱ_i gleich sind. Wir geben die Übersicht über die *eigentlichen* Flächen:

(1.) $\varkappa\{\varrho_1(x_1^2 + x_2^2) + \varrho_3 x_3^2\} + \varrho_4 x_4^2 = 0$;

$0 < \varrho_1 < \varrho_4 < \varrho_3$: Konkaves zweimanteliges nicht geradliniges Drehhyperboloid.

$\varrho_1 < 0 < \varrho_4 < \varrho_3$: Konvexes zweimanteliges nicht geradliniges Drehhyperboloid.

$0 < \varrho_4 < \varrho_1 < \varrho_3$: Abgeplattetes Drehellipsoid.

(2.) $\varkappa\{\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2(x_2^2 + x_3^2)\} + \varrho_4 x_4^2 = 0$;

$0 < \varrho_1 < \varrho_4 < \varrho_2$: Konkaves einmanteliges nicht geradliniges Drehhyperboloid.

$\varrho_1 < 0 < \varrho_4 < \varrho_2$: Konvexes einmanteliges geradliniges Drehhyperboloid.

$0 < \varrho_4 < \varrho_1 < \varrho_2$: Verlängertes Drehellipsoid.

(3.) $\varkappa\{\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \varrho_2 x_3^3\} + \varrho_3 x_4^2 = 0$;

$0 < \varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2$: Schiebfläche einer konkaven Hyperbel[10]);

$0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2$: Schiebfläche einer Ellipse[10]);

$\varrho_1 < 0 < \varrho_3 < \varrho_2$: Schiebfläche einer konvexen Hyperbel[10]).

---

[9]) In den Fig. 6 bis 13 sind ausgewählte dieser und der nachfolgenden Flächen im Schrägbild dargestellt, wobei die AF „ins Endliche hereingeholt" ist.

[10]) Der Mittelpunkt der Kurve bewegt sich auf einer Geraden, die Ebene der kongruent bleibenden Kurve bleibt senkrecht zu dieser: Die Fläche darf *nicht* als Zylinder bezeichnet werden (vgl. Nr. 19).

(4.) $\varkappa\varrho_1(x_1^2 + x_2^2) + \varrho_3(\varkappa x_3^2 + x_4^2) = 0$;

$0 < \varrho_3 < \varrho_1$, Schiebfläche eines Kreises[10]), sog. *Cliffordsche Fläche* der hyperbolischen Geometrie.

(5.) $\varkappa\varrho_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \varrho_4 x_4^2 = 0$: Kugel;

(6.) $\varkappa\varrho_1 x_1^2 + \varrho_4(\varkappa(x_2^2 + x_3^2) + x_4^2) = 0$: Abstandsfläche (zur Ebene $x_1 = 0$).

Die Bedingungen für die Größen φ, t, u der Nrn. 1 und 2, damit die Fälle (1.) bis (6.) der Nr. 9 eintreten, unterdrücken wir der Kürze halber. Es zeigt sich, daß es, vom Falle $\varrho_1 \neq \varrho_2 \neq \varrho_3 = \varrho_4$ abgesehen, jeweils unendlich viele Werte von φ, t, u gibt, da das System (11') der Nr. 2 vom Range 2 oder gar 1 wird.

§ 6. Die Semihyperboloide.

10. Die Normalform

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \varkappa(\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2) + (a_{33} + \varkappa a_{44})\, x_3^2 + 2\delta\sqrt{a_{34}^2 - a_{33}a_{44}}\, x_3 x_4 = 0$$

stellt für

$$(*) \qquad \Delta = (a_{33} - \varkappa a_{44})^2 + 4\varkappa a_{34}^2 < 0$$

die Gleichung der *Semihyperboloide* dar. Die uneigentliche Kurve der Fläche, d. h. ihre Schnittlinie mit der AF ist eine *einteilige* (bei den Mittelpunktsflächen war sie *zweiteilig*), weil ihr zweiter Teil ins ideale Gebiet fällt. Die Konstruktion der Schrägbilder im euklidischen Raum (vgl. Nr. 8) und damit die Einzeldiskussion zeigt, daß es *drei* verschiedene Arten von Semihyperboloiden gibt, nämlich

2 nichtgeradlinige für $\varrho_1\varrho_2 > 0$, $\varrho_1(a_{33} + \varkappa a_{44}) < 0$ und $\varrho_1\varrho_2 > 0$, $\varrho_1(a_{33} + \varkappa a_{44}) > 0$
und 1 geradliniges für $\varrho_1\varrho_2 < 0$, $\varrho_1(a_{33} + \varkappa a_{44}) < 0$ (oder $\varrho_1(a_{33} + \varkappa a_{44}) > 0$).

Dazu kommt das besondere *Drehsemihyperboloid* für $\varrho_1 = \varrho_2$.

§ 7. Die erste Reihe der Paraboloide.

11. Die Normalform

$$(\mathrm{I}a_3) \qquad \varkappa(\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 x_3^2) + \varrho_3 x_4^2 - \varrho'(\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4) = 0$$

stellt eine erste Reihe von *Paraboloiden* dar, wo nun $\varrho_1 < \varrho_2$ und $\varrho' > 0$ sei. Die Klassengleichung von $(\mathrm{I}a_3)$ wird

$$(\mathrm{I}b_3) \qquad \frac{X_1^2}{\varrho_1} + \frac{X_2^2}{\varrho_2} + \frac{X_3^2 + \varkappa X_4^2}{\varrho_3} - \varrho'\frac{(X_3 + \sqrt{-\varkappa}\, X_4)^2}{\varrho_3^2} = 0.$$

Der von $(0\,|\,0\,|\,1\,|\,\sqrt{-\varkappa})$ ausgehende Mittelpunktskegel der Fläche $(\mathrm{I}a_3)$ und der AF ist

$$(1\mathrm{a}) \qquad \varkappa(\varrho_3 - \varrho_1)\, x_1^2 + \varkappa(\varrho_3 - \varrho_2)\, x_2^2 + \varrho'(\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4)^2 = 0.$$

Der in der Ebene $\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4 = 0$ liegende Fokalkegelschnitt der gemeinsamen Torse der Fläche $(\mathrm{I}b_3)$ und der AF hat die Gleichung

$$(1\mathrm{b}) \qquad \frac{\varrho_3 - \varrho_1}{\varrho_1} X_1^2 + \frac{\varrho_3 - \varrho_2}{\varrho_2} X_2^2 - \frac{\varrho'}{\varrho_3}(X_3 + \sqrt{-\varkappa}\, X_4)^2 = 0.$$

Die Schnittpunkte von $(\mathrm{I}a_3)$ mit der Achse $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ folgen aus

$$(\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4)\,\{\varrho_3(\sqrt{-\varkappa}\, x_3 + x_4) + \varrho'(\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4)\} = 0.$$

Der eine, $(0|0|1|\sqrt{-\varkappa})$, ist Berührpunkt von $(\mathrm{I}\,\mathrm{a}_3)$ mit der AF, der andere, der S heiße, ist $(0|0|\varrho' - \varrho_3|(\varrho' + \varrho_3)\sqrt{-\varkappa})$. Dabei ist $S \begin{Bmatrix}\text{eigentlich}\\ \text{ideal}\end{Bmatrix}$, je nachdem $-\varkappa\varrho'\varrho_3 \gtrless 0$, d. h. $\varrho_3 \gtrless 0$ ist.

Um die gegenseitige Lage von $(\mathrm{I}\,\mathrm{a}_3)$ und der AF zu bestimmen, stellen wir fest: Ihre gemeinsame *Raumkurve* ist *nullteilig*, wenn es der Kegel (1a) ist, die gemeinsame *Torse* ist *nullteilig*, wenn es der Kegelschnitt (1b) ist. Die *Raumkurve* ist *nullteilig* für $\varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2$, *einteilig* für $\varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2$ oder $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$. Die Torse ist *nullteilig* für $\varrho_1\varrho_3(\varrho_1 - \varrho_3) > 0$ und $\varrho_2\varrho_3(\varrho_2 - \varrho_3) > 0$, *einteilig* für $\varrho_1\varrho_3(\varrho_1 - \varrho_3) > 0$ und $\varrho_2\varrho_3(\varrho_2 - \varrho_3) < 0$ oder $\varrho_1\varrho_3(\varrho_1 - \varrho_3) < 0$ und $\varrho_2\varrho_3(\varrho_2 - \varrho_3) > 0$ oder $\varrho_1\varrho_3(\varrho_1 - \varrho_3) < 0$ und $\varrho_2\varrho_3(\varrho_2 - \varrho_3) < 0$.

Nun gibt es für die Vorzeichen von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ und die Reihenfolge der ϱ_i folgende 12 Möglichkeiten:

$$\begin{cases} 0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 & \varrho_1 < 0 < \varrho_2 < \varrho_3 & \varrho_1 < \varrho_2 < 0 < \varrho_3 & \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < 0 \\ 0 < \varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2 & \varrho_1 < 0 < \varrho_3 < \varrho_2 & \varrho_1 < \varrho_3 < 0 < \varrho_2 & \varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2 < 0 \\ 0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2 & \varrho_3 < 0 < \varrho_1 < \varrho_2 & \varrho_3 < \varrho_1 < 0 < \varrho_2 & \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2 < 0. \end{cases}$$

Also ist die *Raumkurve nullteilig* für

$$0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2,\ \varrho_3 < 0 < \varrho_1 < \varrho_2,\ \varrho_3 < \varrho_1 < 0 < \varrho_2,\ \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2 < 0.$$

Die *Torse* ist *nullteilig* für

$$0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2,\ \varrho_1 < 0 < \varrho_3 < \varrho_2,\ \varrho_3 < 0 < \varrho_1 < \varrho_2,\ \varrho_1 < \varrho_2 < 0 < \varrho_3,\ \varrho_3 < \varrho_1 < 0 < \varrho_2,$$
$$\varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2 < 0.$$

Damit erhält man die Sätze:

Satz 1. *Raumkurve und Torse sind beide nullteilig für*

$$0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2,\ \varrho_3 < 0 < \varrho_1 < \varrho_2,\ \varrho_3 < \varrho_1 < 0 < \varrho_2,\ \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2 < 0.$$

Satz 2. *Die Raumkurve ist einteilig, die Torse nullteilig für*

$$\varrho_1 < 0 < \varrho_3 < \varrho_2,\ \varrho_1 < \varrho_2 < 0 < \varrho_3.$$

Satz 3. *Raumkurve und Torse sind beide einteilig für*

$$0<\varrho_1<\varrho_2<\varrho_3,\ 0<\varrho_1<\varrho_3<\varrho_2,\ \varrho_1<0<\varrho_2<\varrho_3,\ \varrho_1<\varrho_3<0<\varrho_2,\ \varrho_1<\varrho_2<\varrho_3<0,\ \varrho_1<\varrho_3<\varrho_2<0.$$

Im übrigen ist die Fläche $\begin{Bmatrix}\textit{geradlinig}\\ \textit{nicht geradlinig}\end{Bmatrix}$, je nachdem $\varrho_1\varrho_2 \gtrless 0$ ist.

12. Damit ergeben sich nun 10 Fälle:

1. Fall: $0 < \varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2$: Elliptisches Paraboloid.
2. Fall: $\varrho_1 < 0 < \varrho_3 < \varrho_2$: Geschlossenes geradliniges hyperbolisches Paraboloid.
3. Fall: $\varrho_1 < \varrho_2 < 0 < \varrho_3$: Schaliges nicht geradliniges hyperbolisches Paraboloid.
4. Fall: $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3$: Offenes nicht geradliniges hyperbolisches Paraboloid.
5. Fall: $0 < \varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2$: Geschlossenes nicht geradliniges hyperbolisches Paraboloid.
6. Fall: $\varrho_1 < 0 < \varrho_2 < \varrho_3$: Offenes geradliniges hyperbolisches Paraboloid.
7. Fall: $\varrho_1 < \varrho_3 < 0 < \varrho_2$: Doppelschaliges (konvexes) geradliniges hyperbolisches Paraboloid.
8. Fall: $\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < 0$: Röhrenförmiges nicht geradliniges hyperbolisches Paraboloid.
9. Fall: $\varrho_1 < \varrho_3 < \varrho_2 < 0$: Doppelschaliges (konkaves) nicht geradliniges hyperbolisches Paraboloid.
10. Fall: $\varrho_3 < 0 < \varrho_1 < \varrho_2$ oder $\varrho_3 < \varrho_1 < \varrho_2 < 0$ oder $\varrho_3 < \varrho_1 < 0 < \varrho_2$: Außerabsolute Flächen.

Die Konstruktion der Schrägbilder im euklidischen Bildraum und damit die Einzeldiskussion der Flächen, auf die wir hier nicht eingehen können, ist wieder sehr lehrreich.

13. Wir schließen gleich wieder die Drehflächen und besonderen Flächen an, bei denen zwei oder mehr der Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ gleich werden.

Im Falle $\varrho_2 = \varrho_1$ hat man die *Drehparaboloide*:

1. Fall: $0 < \varrho_3 < \varrho_1$: Elliptisches Drehparaboloid.
3. Fall: $\varrho_1 < 0 < \varrho_3$: Schaliges, nicht geradliniges hyperbolisches Drehparaboloid.
4. Fall: $0 < \varrho_1 < \varrho_3$: Offenes, nicht geradliniges hyperbolisches Drehparaboloid.
8. Fall: $\varrho_1 < \varrho_3 < 0$: Röhrenförmiges, nicht geradliniges hyperbolisches Drehparaboloid.
10. Fall: $\varrho_3 < 0 < \varrho_1$ und $\varrho_3 < \varrho_1 < 0$, Außerabsolute Drehfläche.

Im Falle $\varrho_3 = \varrho_2$ erhält man folgende *Paraboloide*:

1. Fall: $0 < \varrho_2 < \varrho_1$: Besonderer Fall des elliptischen Paraboloids.
2. oder 6. Fall: $\varrho_1 < 0 < \varrho_2$: Besonderes geschlossenes geradliniges hyperbolisches Paraboloid.
4. oder 5. Fall: $0 < \varrho_1 < \varrho_2$: Besonderes geschlossenes nicht geradliniges hyperbolisches Paraboloid.
8. oder 9. Fall: $\varrho_1 < \varrho_2 < 0$: Besonderes doppelschaliges nicht geradliniges hyperbolisches Paraboloid.
10. Fall: $\varrho_2 < \varrho_1 < 0$ oder $\varrho_2 < 0 < \varrho_1$: Außerabsolute Fläche.

Im Falle $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ aber erscheint die *Grenzkugel* mit der Gleichung

$$\varrho_1 x \,|\, x - \varrho' (\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4)^2 = 0.$$

§ 8. Die vierte Normalform der Flächen 2. Grades.

14. Von den Flächen 2. Grades stehen noch die Fälle aus, in denen eine Wurzel $\varrho_1 = \varrho_2$ oder $\varrho_2 = \varrho_3$ (auch $\varrho_2 = \varrho_4$) auftritt, ohne daß $B_{44}^{(1)}$ oder $B_{44}^{(2)}$ verschwinden. In diesen Fällen ist keine der bisherigen Normalformen brauchbar, und wir müssen eine andere zu ermitteln suchen.

Wir beginnen mit dem Fall $\varrho_1 \neq \varrho_2 = \varrho_3$, $B_{44}^{(2)} \neq 0$. Unsere bisher gefundenen Flächen haben *zwei* Symmetrieebenen. Es ist zu erwarten, daß eine Fläche 2. Grades auch nur *eine* solche besitzen kann. Um sie zu erhalten, müssen wir auf den zweiten Pol (10) der Nr. 1 verzichten, können also auch die zweite Schiebung u weglassen.

Die Drehung (3) und die Schiebung (4) der Nr. 1 ergeben zusammengesetzt die Bewegung

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = \alpha_1 C(t)\,\bar{x}_1 + \beta_1 \bar{x}_2 + \gamma_1 \bar{x}_3 - \alpha_1 S(t)\,\bar{x}_4 \\ \varrho x_2 = \alpha_2 C(t)\,\bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 + \gamma_2 \bar{x}_3 - \alpha_2 S(t)\,\bar{x}_4 \\ \varrho x_3 = \alpha_3 C(t)\,\bar{x}_1 + \beta_3 \bar{x}_2 + \gamma_3 \bar{x}_3 - \alpha_3 S(t)\,\bar{x}_4 \\ \varrho x_4 = \varkappa S(t)\,\bar{x}_1 \qquad\qquad\qquad + \quad C(t)\,\bar{x}_4. \end{cases}$$

Die Ebene $\bar{x}_1 = 0$ hat in den ursprünglichen Koordinaten wieder die Gleichung (7) der Nr. 1, also den absoluten Pol (8) der Nr. 1

$$(\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \alpha_3 \mid \varkappa T(t)).$$

Es ergeben sich unverändert die Gleichungen (17), (19), (20) und (21) und die Bedingung (22) der Nr. 2. Die Größen α_i und t sind damit bestimmt, während die β_i und γ_i noch unbestimmt bleiben. Die Gleichung der gegebenen Fläche geht über in

$$(2)\quad f(\bar{x}) = \varkappa \varrho_1 \bar{x}_1^2 + \bar{a}_{22}\bar{x}_2^2 + 2\bar{a}_{23}\bar{x}_2\bar{x}_3 + 2\bar{a}_{24}\bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{a}_{33}\bar{x}_3^2 + 2\bar{a}_{34}\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{a}_{44}\bar{x}_4^2 = 0,$$

wo sich der Koeffizient von $\bar{x}_1^2$ daraus ergibt, daß $(1|0|0)$ im neuen System Pol der gegebenen Fläche und der AF sein muß.

15. Die Flächengleichung (2) hat nun, abgesehen vom Faktor $\varkappa(\varrho_1 - \varrho)$ die charakteristische Gleichung

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \bar{a}_{22} - \varkappa\varrho & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{24} \\ \bar{a}_{23} & \bar{a}_{23} - \varkappa\varrho & \bar{a}_{34} \\ \bar{a}_{24} & \bar{a}_{34} & \bar{a}_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Diese gehört zugleich zu dem Kegelschnitt

$$(4) \qquad \bar{a}_{22}\bar{x}_2^2 + 2\bar{a}_{23}\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{a}_{33}\bar{x}_3^2 + 2\bar{a}_{34}\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{a}_{44}\bar{x}_4^2 = 0.$$

Für ihn soll nun $\varrho_2 = \varrho_3$ sein, ohne daß $\begin{vmatrix} \bar{a}_{22} - \varkappa\varrho_2 & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} - \varkappa\varrho_2 \end{vmatrix}$ verschwindet [11]).

Also muß der Kegelschnitt eine *oskulierende Parabel* sein, deren Gleichung nach Abh. I durch eine *Drehung* und eine *Schiebung* in der $\bar{x}_2\bar{x}_3$-Ebene in die Gestalt

$$(5) \qquad \varrho_2\{\varkappa(\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) + \bar{x}_4^2\} - 2\varrho'\sqrt{-\varkappa}\,x_2(\sqrt{-\varkappa}\,x_3 - x_4) = 0$$

übergeführt werden kann. So entsteht die vierte Normalform

$$(\mathrm{I}_4) \qquad \varkappa\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2\{\varkappa(x_2^2 + x_3^2) + x_4^2\} - 2\varrho'\sqrt{-\varkappa}\,x_2(\sqrt{-\varkappa}\,x_3 - x_4) = 0$$

unserer Fläche 2. Grades, deren charakteristische Gleichung die Wurzeln $\varrho_1 \neq \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4$ hat.

16. Die Fläche (I_4) berührt die AF im Punkt $(0|0|1|\sqrt{-\varkappa})$, der eine *Spitze* ihrer Schnittkurven mit der Tangente $x_1 = 0$, $\sqrt{-\varkappa}\,x_3 - x_4 = 0$ ist. Die beiden Flächen gehen durch den Punkt $(0|0|1|\sqrt{-\varkappa})$ mit der Tangente $x_2 = 0$, $\sqrt{-\varkappa}\,x_3 + x_4 = 0$ an ihre Schnittkurve.

Man hat, wie am einfachsten wieder die Diskussion des Euklidischen Abbildes zeigt, folgende 3 Arten von Paraboloiden:

1. Fall: *1. Unterfall.* $0 < \varrho_{12} < \varrho$: Gespitztes geschlossenes nicht geradliniges hyperbolisches Paraboloid.

2. Unterfall. $0 < \varrho_1 < \varrho_2$: Gespitztes offenes (konkaves) nicht geradliniges hyperbolisches Paraboloid.

2. Fall: $\varrho_1 < 0 < \varrho_2$: Gespitztes offenes (konvexes) geradliniges hyperbolisches Paraboloid.

Als besonderer Fall der 4. Normalform ergibt sich noch mit $\varrho_2 = \varrho_1$

$$(\mathrm{I}_4') \qquad \varrho_1 x\,|\,x - 2\varrho'\sqrt{-\varkappa}\,x_2(\sqrt{-\varkappa}\,x_3 - x_4) = 0.$$

Die Schnittkurve dieser Fläche mit der AF zerfällt in ein imaginäres Geradenpaar durch den Punkt $(0|0|1|\sqrt{-\varkappa})$ und den AK $x_2 = 0$, $\varkappa(x_1^2 + x_3^2) + x_4^2 = 0$. Die Fläche heißt *oskulierendes Paraboloid.* Bei ihr hat die charakteristische Gleichung 4 zusammenfallende Wurzeln $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4$. Das System (1) der Nr. 10 hat dann nicht mehr den Rang 3 wie bei der Fläche (I_4).

17. Es fehlt jetzt noch der Fall, in dem sich $\varrho_1 = \varrho_2$ ergibt, aber $B_{44}^{(1)} \neq 0$ ist. Der entsprechende Fall $\varrho_1 = \varrho_2$, $B_{33}^{(1)} \neq 0$ bei den Kegelschnitten führte auf die *oskulierende Parabel* mit $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ und zu der Feststellung, daß es in der hyperbolischen Geometrie einen Kegelschnitt *ohne* Symmetrieachse gibt. Es wäre also möglich, daß es eine Fläche 2. Grades *ohne* Symmetrieebene gibt. Mittels der Theorie der Elementarteiler (s. die

---

[11]) Es soll ja $B_{44}^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa\varrho_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \varkappa\varrho_2 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \varkappa\varrho_2 \end{vmatrix} \neq 0$ sein. Im neuen System wird daraus

$$\varkappa(\varrho_1 - \varrho_2)\begin{vmatrix} \bar{a}_{22} - \varkappa\varrho_2 & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} - \varkappa\varrho_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Abh. von T. Bromwich) läßt sich zeigen, daß dies *nicht* eintreten kann. Der innere Grund dafür ist, daß die AF nicht geradlinig ist. Leider ist mir ein elementarer Beweis dieses Satzes mit den Hilfsmitteln dieser Abhandlung noch nicht gelungen und so muß diese Lücke bleiben.

§ 9. Die Kegel zweiter Ordnung.

18. Von den *zerfallenden Flächen zweiter Ordnung* verdienen den Namen Flächen 2. Ordnung nur die *einfach* zerfallenden, die *Kegelflächen*[12]). In der *projektiven Geometrie* gibt es deren zwei: *nullteilige* und *einteilige*.

In der *hyperbolischen Geometrie* dagegen sind eine Reihe von Kegelarten vorhanden. Um sie zu erhalten, hat man in den vorangehenden Nummern immer nur eine der Wurzeln ϱ_i der charakteristischen Gleichung gleich Null zu setzen (da die Determinante a der Flächengleichung verschwinden muß). Außerdem treten an Stelle der Torse die *vier* gemeinsamen Berührebenen des Kegels und der AF, die wir die *absoluten Tangentialebenen* nennen.

19. Wir beginnen mit dem *Semikegel*, dessen Gleichung sich aus Nr. 12, (I_2) mit $\varrho_1 = 0$ zu

$$(1) \qquad \varkappa\varrho_2 x_2^2 + (a_{33} + \varkappa a_{44})\, x_3^2 + 2\delta\sqrt{a_{34}^2 - a_{33}a_{44}}\, x_3 x_4 = 0, \quad \Delta > 0,$$

ergibt.

Unter den *Mittelpunktsflächen* mit verschiedenen Halbachsen finden sich zwei Hauptarten von Kegeln:

1. Hauptart: $\varrho_4 = 0$,

$$(2) \qquad \varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 x_3^2 = 0.$$

Die Spitze $(0|0|0|1)$ ist *eigentlich*: *Kegel mit eigentlicher Spitze* oder *Kegel schlechtweg*;

2. Hauptart: $\varrho_1 = 0$,

$$(3) \qquad \varkappa(\varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 x_3^2) + \varrho_4 x_4^2 = 0.$$

Die Spitze $(1|0|0|0)$ ist *ideal*. Die Fläche heiße *Zylinder*[13]).

Nimmt man $\varrho_2 < \varrho_3$, $\varrho_4 > 0$ an, so führt eine etwas einfachere Diskussion als in § 5 auf folgende 5 Fälle:

1. Fall: $0 < \varrho_2 < \varrho_4 < \varrho_3$: Konkaver zweimanteliger hyperbolischer Zylinder.
2. Fall: $0 < \varrho_4 < \varrho_2 < \varrho_3$: Konkaver einmanteliger elliptischer Zylinder.
3. Fall: $\varrho_2 < 0 < \varrho_4 < \varrho_3$: Konvexer zweimanteliger hyperbolischer Zylinder.
4. Fall: $\varrho_2 < 0 < \varrho_3 < \varrho_4$: Außerabsoluter ausschließender Zylinder.
5. Fall: $0 < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_4$ und $\varrho_2 < \varrho_3 < 0 < \varrho_4$: Außerabsoluter umschließender bzw. nullteiliger Zylinder.

Unter den *Mittelpunktsflächen* mit gleichen Halbachsen findet sich der *Zylinder*

$$(4) \qquad \varkappa(\varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 x_3^2) + \varrho_3 x_4^2 = 0, \quad \varrho_3 > 0,$$

mit folgenden beiden Arten:

---

[12]) Gleichberechtigt wären freilich die zu ihnen dualen *Fokalkegelschnitte*.

[13]) *Zylinder* heiße ein Kegel mit *idealer* Spitze. Seine *Grundfläche* oder *Kehle* ist sein Schnitt mit der Polarebene seiner Spitze, seine Achse die Verbindungsgerade der Spitze mit dem Kehlenmittelpunkt. In der Literatur heißt „Zylinder" leider auch die *Schiebefläche*, die durch Schiebung eines Kegelschnitts längs einer auf seiner Ebene senkrechten Achse entsteht, z. B. die *Cliffordsche Fläche*. Ein Kegel mit *absoluter* Spitze heiße *Grenzkegel*.

1. Fall: $0 < \varrho_3 < \varrho_2$: Schiebefläche eines Paares von Nichtschneidenden längs einer Achse, die im Mittelpunkt ihres kürzesten Abstands auf ihrer Ebene senkrecht steht.

2. Fall: $0 < \varrho_2 < \varrho_3$ und $\varrho_2 < 0 < \varrho_3$: Außerabsolute Zylinder.

Weiter ergeben sich noch die Gleichungen

(5) $\varrho_1(x_1^2 + x_2^2) + \varrho_3 x_3^2 = 0$: *Drehkegel* und

(6) $\varkappa\varrho_1(x_1^2 + x_2^2) + \varrho_4 x_4^2 = 0$: *Drehzylinder.*

20. Unter der ersten Reihe von *Paraboloiden* finden sich wieder zwei Hauptarten von Kegeln:

1. Hauptart: $\varrho_3 = 0$,

(7) $$\varkappa(\varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2) - \varrho'(\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4)^2 = 0, \quad \varrho_1 < \varrho_2, \varrho' > 0.$$

Die Spitze $(0|0|1|\sqrt{-\varkappa})$ ist *absolut.*

1. Fall: $0 < \varrho_1 < \varrho_2$: Nullteiliger Kegel.

2. Fall: $\varrho_1 < \varrho_2 < 0$: Einteiliger Kegel mit absoluter Spitze.

3. Fall: $\varrho_1 < 0 < \varrho_2$: Zweiteiliger Kegel mit absoluter Spitze.

2. Hauptart: $\varrho_1 = 0$,

(8) $$\varkappa(\varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 x_3^2) + \varrho_3 x_4^2 - \varrho(\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4)^2 = 0, \quad \varrho_2 \neq \varrho_3, \varrho' > 0.$$

Die Spitze $(1|0|0|0)$ ist *ideal*, also sind die Flächen *Zylinder.*

1. Fall: $0 < \varrho_2 < \varrho_3$: Offener konkaver parabolischer Zylinder.

2. Fall: $\varrho_2 < \varrho_3 < 0$: Zweiteiliger parabolischer Zylinder.

3. Fall: $\varrho_2 < 0 < \varrho_3$: Offener konvexer parabolischer Zylinder.

4. Fall: $0 < \varrho_3 < \varrho_2$: Geschlossener konkaver parabolischer Zylinder.

5. Fall: $\varrho_3 < 0 < \varrho_2$ und $\varrho_3 < \varrho_2 < 0$: Außerabsoluter Zylinder.

Dazu kommen noch die besonderen Fälle

(9) $$\varkappa\varrho_1(x_1^2 + x_2^2) - \varrho'(\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4)^2 = 0, \quad \varrho' > 0.$$

1. Fall: $\varrho_1 > 0$: Nullteiliger Kegel.

2. Fall: $\varrho_1 < 0$: Drehkegel mit absoluter Spitze.

(10) $$\varrho_2(\varkappa(x_2^2 + x_3^2) + x_4^2] - \varrho'(\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4)^2 = 0, \quad \varrho' > 0.$$

1. Fall: $\varrho_2 > 0$: Besonderer konkaver elliptischer Zylinder.

2. Fall: $\varrho_2 < 0$: Außerabsoluter Zylinder.

21. Aus der zweiten Reihe von *Paraboloiden* entspringen noch die zwei Kegel

(11) $$\varkappa\varrho_1 x_1^2 - 2\varrho\sqrt{-\varkappa}\, x_2(\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4) = 0,$$

Gespitzter Kegel mit absoluter Spitze $(0|0|1|\sqrt{-\varkappa})$

und

(12) $$\varrho_2\{\varkappa(x_2^2 + x_3^2) + x_4^2\} - 2\varrho'\sqrt{-\varkappa}\, x_3(\sqrt{-\varkappa}\, x_3 - x_4) = 0,$$

Gespitzter Zylynder mit Spitze $(1|0|0|0)$

Bei beiden Flächen ist $(0|0|1|\sqrt{-\varkappa})$ *Spitze* der Schnittkurven von Kegel und AF.

Schlußbemerkung. Rechnet man die besonderen Flächen, z. B. die Drehflächen mit, so gibt es 43 eigentliche Flächen 2. Grades und 19 Kegel 2. Grades, zählt man sie nicht mit, so erhält man 27 eigentliche Flächen und 16 Kegel.

Eingegangen 25. Juli 1955.

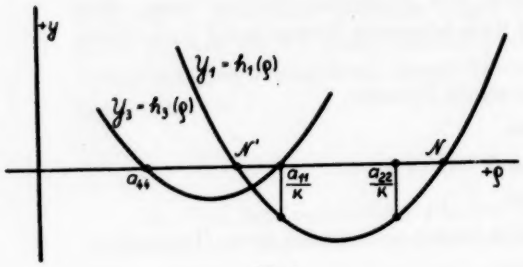

Fig. 1

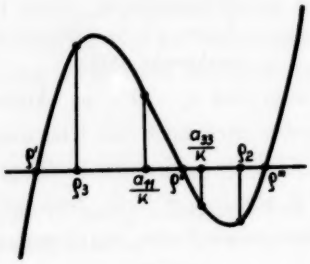

Fig. 2

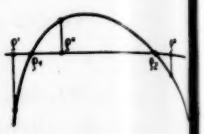

Fig. 3a

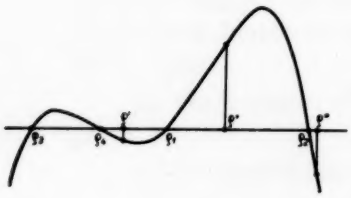

Fig. 3b

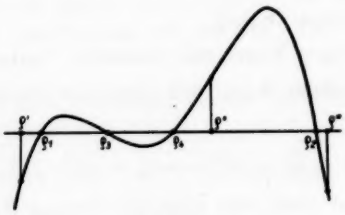

Fig. 3c

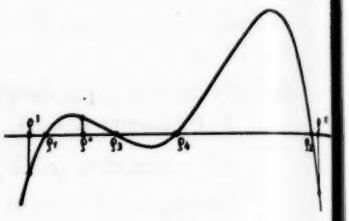

Fig. 3d

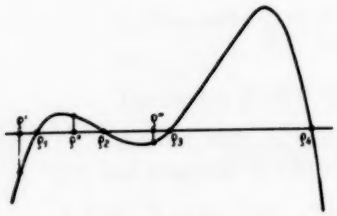

Fig. 3e

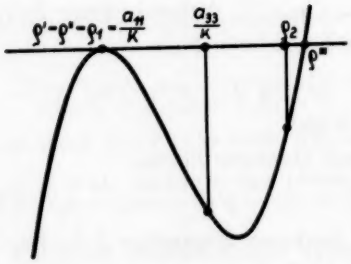

Fig. 4

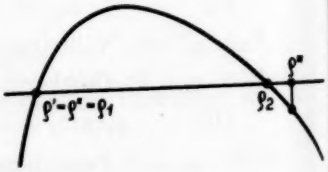

Fig. 5a

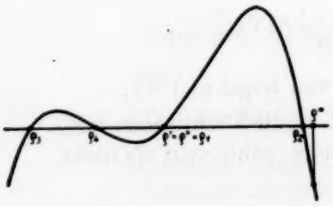

Fig. 5b

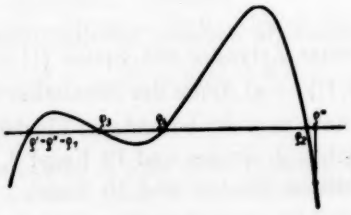

Fig. 5c

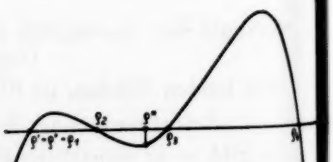

Fig. 5

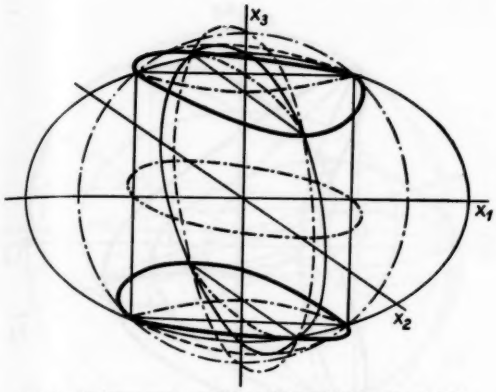

Fig. 6. Konkaves zweimanteliges nichtgeradliniges Hyperboloid

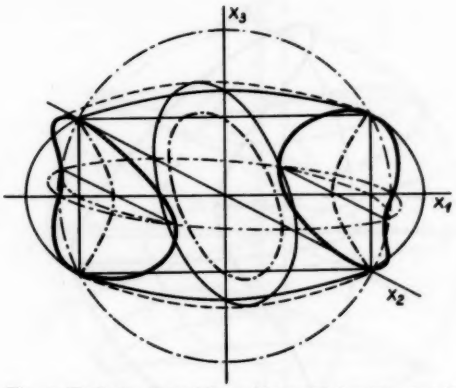

Fig. 7. Konkaves einmanteliges nichtgeradliniges Hyperboloid

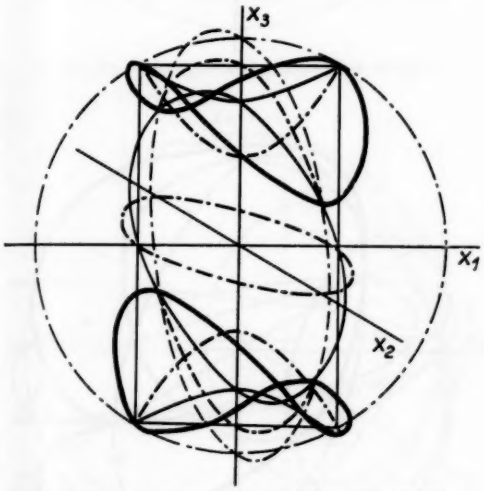

Fig. 8. Konvexes zweimanteliges geradliniges Hyperboloid

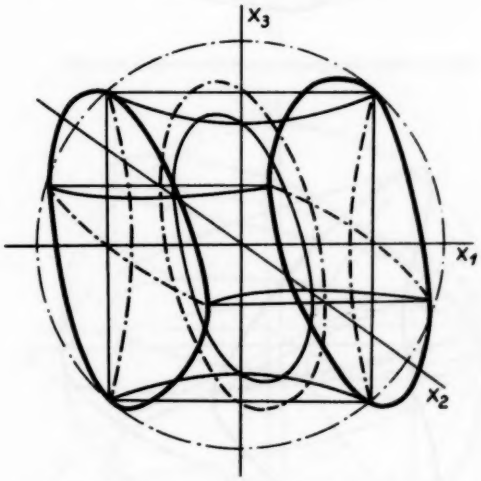

Fig. 9. Konvexes einmanteliges geradliniges Hyperboloid

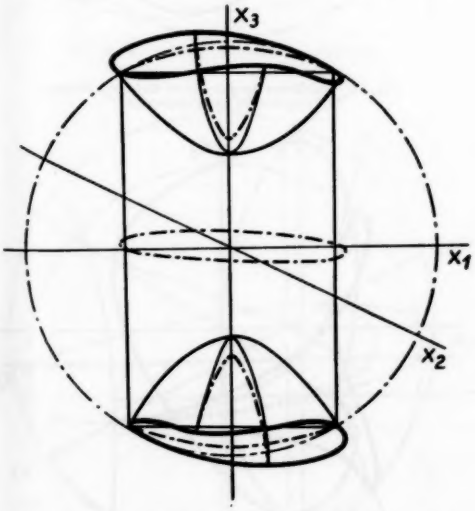

Fig. 10. Konvexes zweimanteliges nichtgeradliniges Hyperboloid

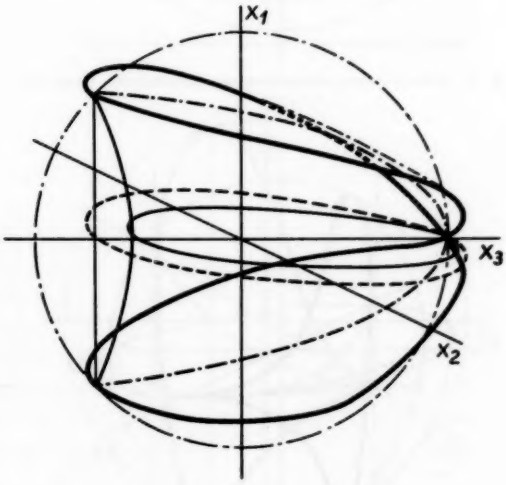

Fig. 11. Geschlossenes geradliniges hyperbolisches Paraboloid

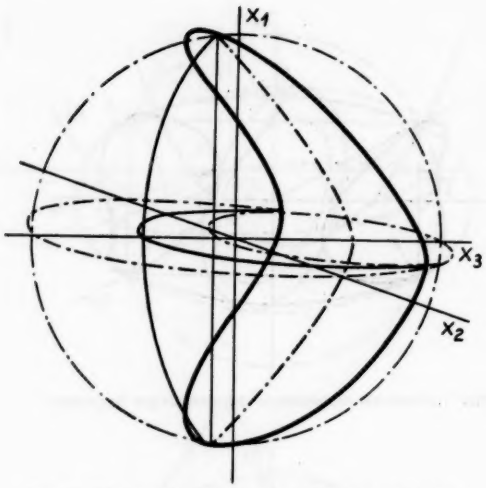

Fig. 12. Offenes nichtgeradliniges hyperbolisches Paraboloid

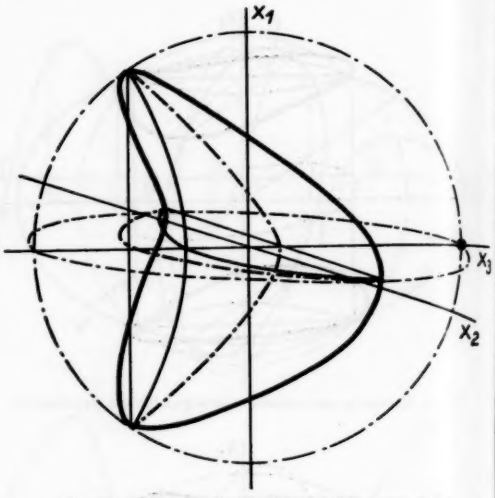

Fig. 13. Offenes geradliniges hyperbolisches Paraboloid

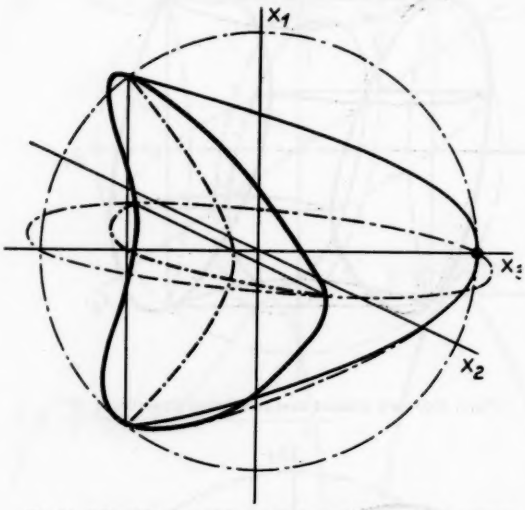

Fig. 14. Röhrenförmiges nichtgeradliniges hyperbolisches Paraboloid

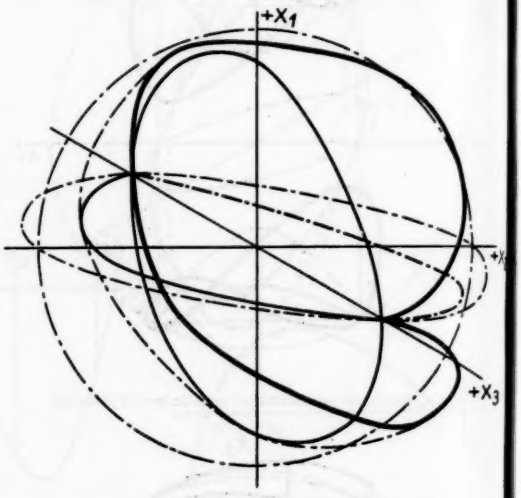

Fig. 15. Gespitztes geschlossenes nichtgeradliniges hyperbolisches Paraboloid

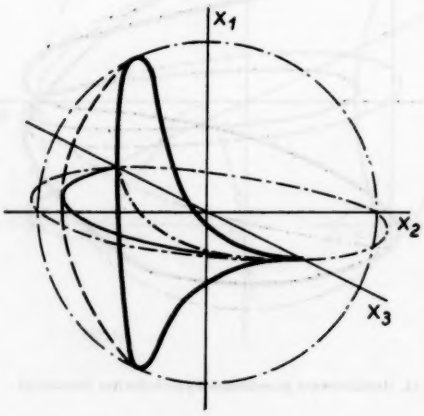

Fig. 16. Gespitztes offenes nichtgeradliniges hyperbolisches Paraboloid

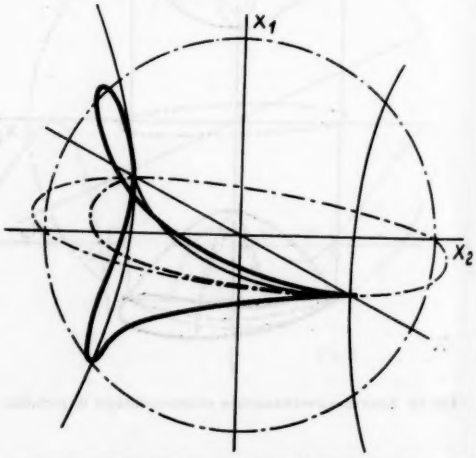

Fig. 17. Gespitztes offenes geradliniges hyperbolisches Paraboloid

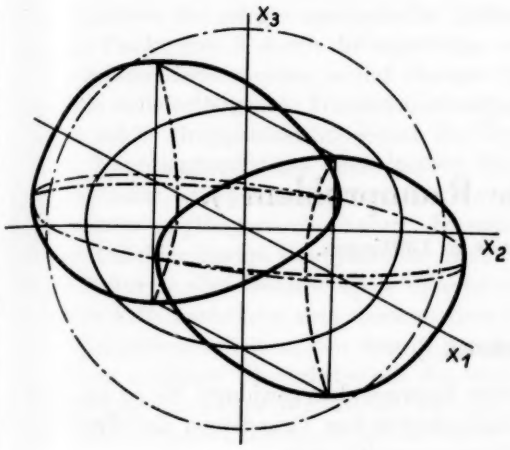

Fig. 18. Konkaver einmanteliger elliptischer Zylinder

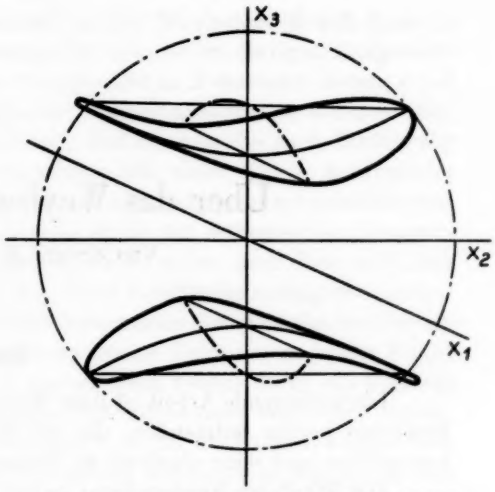

Fig. 19. Konvexer zweimanteliger hyperbolischer Zylinder

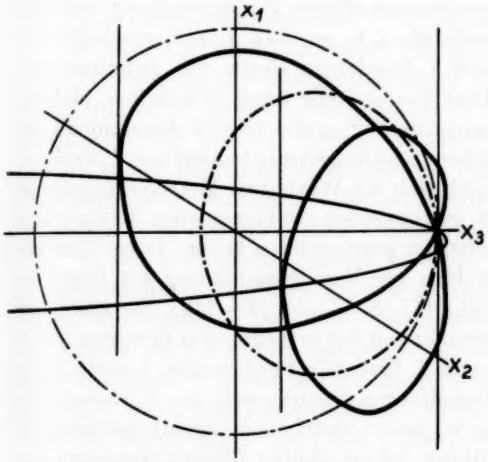

Fig. 20. Zweiteiliger parabolischer Zylinder

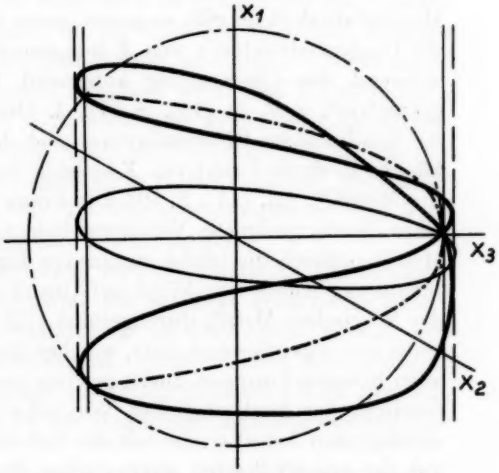

Fig. 21. Geschlossener konkaver parabolischer Zylinder

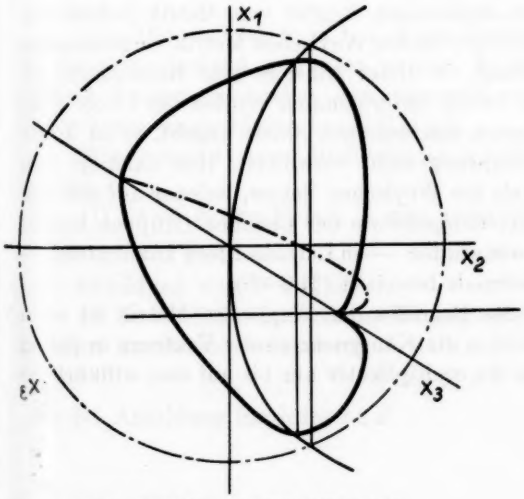

Fig. 22. Gespitzter Kegel mit absoluter Spitze

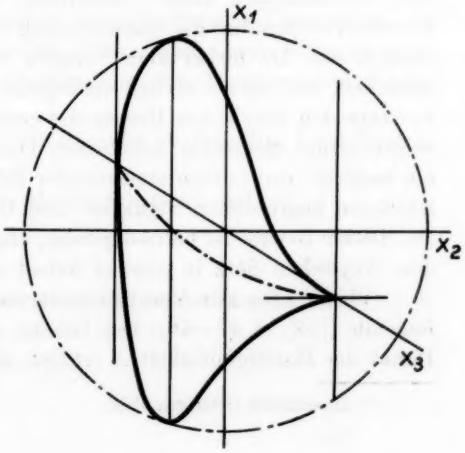

Fig. 23. Gespitzter Zylinder

Über das Weylsche Raumproblem*).

Von *Erhard Scheibe* in Göttingen.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist dem Weylschen Raumproblem gewidmet. Sie ist aus dem Bedürfnis heraus entstanden, die differentialgeometrischen Grundlagen des Problems herzustellen und seine algebraische Behandlung zu vereinfachen.

Die Weylsche Fragestellung knüpft an die beiden folgenden für den Begriff der Weylschen Metrik gültigen Sachverhalte an: 1. Zu jeder Weylschen Metrik in einer Mannigfaltigkeit X gibt es genau einen symmetrischen affinen Zusammenhang, welcher die Tangentialvektoren von X kongruent überträgt, d. h. so, daß kongruente Vektoren während der Übertragung kongruent bleiben („Fundamentalsatz der Infinitesimalgeometrie", z. B. in [14], S. 17). 2. Die beiden Bestandteile einer Weylschen Metrik, die quadratische Differentialform und der „kongruente" symmetrische Zusammenhang können in einem Punkt von X beliebig vorgegebene „Anfangswerte" annehmen („Freiheit der Metrik", vgl. [14], S. 49). Die Frage war, ob sich die Weylschen Metriken innerhalb einer durch geeignete Verallgemeinerung zu gewinnenden umfassenderen Klasse von Metriken durch die beiden genannten Eigenschaften kennzeichnen lassen. Diese Charakterisierung wurde von Weyl auf Grund einer Idee zur Verallgemeinerung des Begriffes der Weylschen Metrik durchgeführt ([12], [13], [14], S. 43—61, 86—112). Sie führt auf einen rein algebraischen Satz, welcher die Auszeichnung der orthogonalen Gruppen unter allen linearen Gruppen durch gewisse aus 1. und 2. fließende Forderungen leistet. Beim Studium der diesbezüglichen Weylschen Abhandlungen konnte sich der Verfasser der vorliegenden Arbeit weder mit der Aufstellung des neuen metrischen Grundbegriffes noch mit der anschließenden algebraischen Behandlung der erwähnten Charakterisierung zufrieden geben. Erstere erscheint allzu skizzenhaft vorgenommen, als daß man durch sie eine mathematisch klare Vorstellung von demjenigen Begriff von Metrik bekommen könnte, von dem her die Auszeichnung des Begriffes der Weylschen Metrik vorgenommen werden soll. Da bisher kein Versuch vorliegt, in dieser Hinsicht eine Klarstellung zu erreichen, soll dieser in der vorliegenden Arbeit unternommen werden (§§ 1—5). Was zweitens den Weylschen Beweis des erwähnten algebraischen Satzes angeht, so ist dieser wegen seiner elementar gehaltenen Durchführung recht verwickelt. Hier existiert nun ein anderer, von Cartan stammender Beweis des Weylschen Satzes, welcher auf der von letzterem begründeten Struktur- und Darstellungstheorie der Lieschen Gruppen beruht [4]. Dieser Beweis ist befriedigender, und wir werden — an Cartans Ideen anknüpfend — den Weylschen Satz in unserer Arbeit nochmals beweisen (§§ 6—8).

Weyls Idee zur Verallgemeinerung des Begriffes der Weylschen Metrik ist etwa folgende ([14], S. 47—48): Das Gesetz, welches die Kongruenz zweier Vektoren in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit X erklärt, also die multiplikativ nur bis auf eine willkürliche

*) Dissertation Göttingen 1955.

Ortsfunktion festgelegte quadratische Differentialform der Weylschen Metrik kann in jedem Punkt von X durch die zugehörige orthogonale Gruppe im dortigen Tangentialvektorraum ersetzt werden, so daß also eine Art Gruppenfeld in X entsteht: Jedem $x \in X$ ist eine volle orthogonale Transformationsgruppe des Tangentialraumes in x zugeordnet. Jedes solche Gruppenfeld hat jedoch die Eigenschaft, daß die dasselbe nach Einführung eines Koordinatensystems darstellenden Matrixgruppen alle einer Klasse konjugierter orthogonaler Gruppen angehören: Die Weylsche Metrik hat eine feste, ortsunabhängige, sogenannte „pythagoreische Natur". Es sollen nun an Stelle der orthogonalen Gruppenfelder beliebige lineare Gruppenfelder treten können, jedoch sollen auch diese noch eine feste Natur im oben beschriebenen Sinne haben. Mit dieser Verallgemeinerung der quadratischen Differentialform zum linearen Gruppenfeld bestimmter Natur bleibt im Prinzip die Möglichkeit erhalten, den Begriff der Kongruenz zweier Vektoren in jedem Punkt $x \in X$ zu erklären: Überführbarkeit des einen in den anderen Vektor durch ein Element der Gruppe des Feldes in x. Jedoch kann der andere Bestandteil einer Weylschen Metrik, das infinitesimale Übertragungsgesetz für die Strecken, d. h. für die Klassen kongruenter Vektoren, nicht als solcher in den neuen Begriff von Metrik übernommen werden, da sich dieses für die Kongruenzklassen beliebiger linearer Gruppenfelder gar nicht analytisch erfassen läßt. Es ist naheliegend — und wohl von Weyl auch so gedacht worden —, statt dessen zu einem infinitesimalen Übertragungsgesetz für die Vektoren zu greifen, welches diese so überträgt, daß kongruente Vektoren kongruent bleiben, und durch welches daher eine Übertragung der Kongruenzklassen wenigstens induziert wird. Das Übertragungsgesetz für die Vektoren kann dann durch einen nicht notwendig symmetrischen affinen Zusammenhang definiert werden. Genau in diesem Sinne unterscheidet sich im übrigen bereits in der Begriffsebene der Metrik von pythagoreischer Natur Cartans „metrischer Zusammenhang" von der Weylschen Metrik ([5] bis [7]). Wir werden daher zu einer Verallgemeinerung des metrischen Zusammenhanges von Cartan geführt.

In der vorliegenden Arbeit wird die Präzisierung und systematische Entwicklung der angedeuteten Begriffsbildungen unter Bezugnahme auf beliebige analytische Faserräume durchgeführt. Der dabei eingenommene Standpunkt ist vorwiegend formal, erst am Schluß des § 4 werden wir wieder auf die vorstehenden geometrischen Bemerkungen zurückkommen. Von der neu gewonnenen Grundlage aus erfolgt dann ab § 5 die Behandlung des Weylschen Raumproblems, wobei wir zu der fraglichen Charakterisierung nur noch die Forderung 1. brauchen werden.

§ 1. Analytische Faserräume.

1. 1. Wir entwickeln in 1. 1 einige Grundbegriffe über analytische Faserräume, die in der Folge laufend gebraucht werden. In formaler Hinsicht ist unser Vorgang weitgehend demjenigen analog, den Steenrod zur Begründung der Theorie topologischer Faserräume eingeschlagen hat ([11], § 2).

Wir beginnen unsere Ausführungen mit der Definition des analytischen Koordinatenraumes.

(1) Es sei B eine Menge, X eine analytische Mannigfaltigkeit und

$$p\colon B \to X$$

eine Abbildung von B auf X.

(2) Es sei Y eine analytische Mannigfaltigkeit, $\{V_i\}$ eine offene Überdeckung von X, indiziert durch eine Indexmenge J, und

$$\Phi_i\colon V_i \times Y \to p^{-1}(V_i)$$

eine 1-1 Abbildung für jedes $i \in J$.

(3) Die bei festem $x \in V_i$ durch Φ_i induzierte Abbildung $\Phi_{i,x}\colon Y \to p^{-1}(V_i)$ sei eine 1-1 Abbildung von Y auf $p^{-1}(x)$:

$$\Phi_{i,x}\colon Y \to p^{-1}(x), \quad \Phi_{i,x}(y) = \Phi_i(x, y).$$

(4) Es sei ferner G eine Liesche Gruppe mit dem Einselement e, die als effektive analytische Transformationsgruppe auf Y operiert, d. h. es ist eine analytische Abbildung $\tau\colon G \times Y \to Y$ gegeben, für die

a) $\tau(g, \tau(g', y)) = \tau(g \cdot g', y)$, $\tau(e, y) = y$ für alle $y \in Y$,

b) aus $\tau(g, y) = y$ für alle $y \in Y$ folgt $g = e$

gilt. Eine solche bezeichnen wir stets mit (G, Y, τ).

(5) Die bei beliebig gegebenem $i, j \in J$ und $x \in V_i \frown V_j$ aus den Abbildungen $\Phi_{i,x}$, $\Phi_{j,x}$ zusammengesetzte Abbildung

$$\Phi_{j,x}^{-1}\Phi_{i,x}\colon Y \to Y$$

werde durch die Operation eines Elementes aus G bewirkt. Da G effektiv auf Y operiert, ist dieses Element durch die Abbildung eindeutig bestimmt.

(6) Auf Grund der Forderung (5) entsteht eine Abbildung

$$g_{ji}\colon V_i \frown V_j \to G, \quad g_{ji}(x) = \Phi_{j,x}^{-1}\Phi_{i,x},$$

indem jedem $x \in V_i \frown V_j$ dasjenige eindeutig bestimmte Element $g_{ji}(x) \in G$ zugeordnet wird, welches die Abbildung (5) bewirkt, und welches wir daher mit dieser Abbildung identifizieren. Wir fordern, daß jede der Abbildungen g_{ji} analytisch ist.

Die entstehende Gesamtheit nennen wir einen *analytischen Koordinatenraum* (B). B heißt das *Bündel*, X der *Basisraum*, p die *Projektion*, Y die *Faser*, $Y_x = p^{-1}(x)$ die *Faser über* $x \in X$, G die *Gruppe* von (B). Die offenen Mengen V_i heißen die *Koordinatenumgebungen*, die Abbildungen Φ_i die *Koordinatenfunktionen* und die Abbildungen g_{ji} die *Koordinatentransformationen* von (B). Wir führen noch die Abbildungen

$$p_i\colon p^{-1}(V_i) \to Y, \; p_i(b) = \Phi_{i,p(b)}^{-1}(b) \tag{7}$$

ein und nennen sie die *Querprojektionen* von (B). Man beweist nun leicht die folgenden elementaren Beziehungen

zwischen den Projektionen und Koordinatenfunktionen:

$$p(\Phi_i(x, y)) = x, \quad p_i(\Phi_i(x, y)) = y, \quad x \in V_i, y \in Y, \tag{8}$$

$$\Phi_i(p(b), p_i(b)) = b, \qquad b \in p^{-1}(V_i); \tag{9}$$

zwischen den Koordinatenfunktionen und Koordinatentransformationen:

$$\Phi_j(x, g_{ji}(x)\, y) = \Phi_i(x, y), \; x \in V_i \frown V_j, \; y \in Y; \tag{10}$$

zwischen den Querprojektionen und Koordinatentransformationen:

$$g_{ji}(p(b))\, p_i(b) = p_j(b), \; b \in p^{-1}(V_i \frown V_j); \tag{11}$$

zwischen den Koordinatentransformationen im Durchschnitt dreier Koordinatenumgebungen:

$$g_{kj}(x)\, g_{ji}(x) = g_{ki}(x), \quad x \in V_i \frown V_j \frown V_k. \tag{12}$$

Aus (6) und (10) folgt leicht, daß die aus den beiden Koordinatenfunktionen Φ_i, Φ_j zusammengesetzte Abbildung $\Phi_j^{-1}\Phi_i$ ein analytischer Isomorphismus ([9], S. 74, Def. 1)

von $(V_i \frown V_j) \times Y$ auf sich ist. Die Koordinatenfunktionen definieren daher eine analytische Struktur auf dem Bündel B. Wegen (4) sind die Abbildungen (5) analytische Isomorphismen, und daher definieren bei gegebenem $x \in X$ die $\Phi_{i,x}$ eine analytische Struktur auf der Faser Y_x, so daß Y_x eine Untermannigfaltigkeit ([9], S. 85, Def. 1) von B ist. Bezüglich dieser analytischen Strukturen von B, Y_x, sowie der auf X, Y und G a priori vorhandenen sind offenbar alle bisher definierten Abbildungen analytisch.

Die analytischen Eigenschaften der einen analytischen Koordinatenraum bildenden Mengen und Abbildungen schließen bekanntlich topologische Eigenschaften derselben ein. Bezüglich dieser ist jeder analytische Koordinatenraum ein topologischer Koordinatenraum im Sinne von Steenrod ([11], S. 7).

Zwei analytische Koordinatenräume (B') und (B) heißen *äquivalent*, wenn $B' = B$, $X' = X$, $p' = p$, $Y' = Y$, $G' = G$, $\tau' = \tau$ ist, alle Abbildungen

$$\Phi'^{-1}_{k,x}\Phi_{j,x}\colon\ Y \to Y \tag{5'}$$

durch Elemente von G bewirkt werden und die Abbildungen

$$\bar{g}_{kj}\colon V_j \frown V'_k \to G, \quad \bar{g}_{kj}(x) = \Phi'^{-1}_{k,x}\Phi_{j,x} \tag{6'}$$

analytisch sind. Die Gleichheitspostulate sind erfüllt. Für die *Äquivalenztransformationen* $\bar{g}_{kj}$ gelten die Formeln

$$\Phi'_k(x, \bar{g}_{kj}(x)\, y) = \Phi_j(x, y), \quad x \in V_j \frown V'_k, \tag{10'}$$

$$\bar{g}_{kj}(p(b))\, p_j(b) = p'_k(b), \quad b \in p^{-1}(V_j \frown V'_k), \tag{11'}$$

$$\begin{cases} \bar{g}_{kj}(x)\, g_{ji}(x) = \bar{g}_{ki}(x), & x \in V_i \frown V_j \frown V'_k, \\ g'_{lk}(x)\, \bar{g}_{kj}(x) = \bar{g}_{lj}(x), & x \in V_j \frown V'_k \frown V'_l, \end{cases} \tag{12'}$$

die der Formeln (10) bis (12) entsprechen. Ferner beweist man leicht den folgenden

Satz 1. *Es sei (B) ein analytischer Koordinatenraum. Es besteht eine natürliche 1-1 Abbildung zwischen allen zu (B) äquivalenten Koordinatenräumen (B') und allen Systemen von analytischen Abbildungen $\bar{g}_{kj}\colon V_j \frown V'_k \to G$ bezüglich einer weiteren Überdeckung $\{V'_k\}$ von X, für welche die erste der Gleichungen (12') gilt. Die Abbildung ist derart, daß die $\bar{g}_{kj}$ die Äquivalenztransformationen von (B) und (B') sind.*

Eine Klasse äquivalenter analytischer Koordinatenräume (B) heiße ein *analytischer Faserraum* $\{B\}$. Die auf seinem Bündel und dessen Fasern durch einen seiner Koordinatenräume definierten analytischen Strukturen hängen wegen (5'), (6') nicht von dem zur Definition benutzten Koordinatenraum ab.

Die zwei äquivalenten analytischen Koordinatenräumen zugrunde liegenden topologischen Koordinatenräume sind topologisch äquivalent. Daher bestimmt jeder analytische Faserraum eindeutig einen topologischen Faserraum ([11], S. 8ff.).

Unter einem *Querschnitt* f in einem analytischen Faserraum $\{B\}$ verstehen wir eine analytische Abbildung

$$f\colon X \to B \text{ mit } p(f(x)) = x \tag{13}$$

identisch in $x \in X$. In bezug auf einen Koordinatenraum (B) von $\{B\}$, in Zeichen $(B) \in \{B\}$, läßt sich f durch ein System von analytischen Abbildungen $f_i\colon V_i \to Y$ mit dem Transformationsgesetz

$$f_j(x) = g_{ji}(x)\, f_i(x), \quad x \in V_i \frown V_j \tag{14}$$

charakterisieren, d. h. es besteht eine natürliche 1-1 Abbildung zwischen allen Querschnitten f in $\{B\}$ und allen Systemen $\{f_i\}$, für die (14) gilt. Wir definieren diese Abbildung, indem wir dem Querschnitt f das System

$$f_i\colon V_i \to Y, \quad f_i(x) = p_i(f(x)) \tag{15}$$

zuordnen, welches wegen (11) ersichtlich das Transformationsgesetz (14) besitzt. Wegen (9) ist die so hergestellte Abbildung eindeutig umkehrbar, und wegen (10) erschöpft sie die Menge der Systeme $\{f_i\}$ mit (14). Ihre Umkehrung lautet

$$f\colon X \to B, \quad f(x) = \Phi_i(x, f_i(x)). \tag{16}$$

Die Abbildungen f_i mögen die *Komponenten von f in* (B) heißen. Die Komponentensysteme von f in zwei Koordinatenräumen (B), $(B') \in \{B\}$ werden wegen (11′) durch

$$f'_k(x) = \bar{g}_{kj}(x)\, f_j(x), \quad x \in V_j \cap V'_k \tag{14'}$$

ineinander transformiert.

Ein weiterhin hauptsächlich auftretender analytischer Faserraum ist der Tangentialfaserraum einer analytischen Mannigfaltigkeit. Der Begriff der analytischen Mannigfaltigkeit ist (in topologischer Hinsicht) in der Literatur nicht eindeutig festgelegt. Wir verstehen in dieser Arbeit unter einer *n-dimensionalen analytischen Mannigfaltigkeit* jeden n-dimensionalen topologischen Raum X zusammen mit einer Klasse äquivalenter analytischer Koordinatensysteme für X. Dabei besteht ein analytisches Koordinatensystem für X aus einer offenen Überdeckung $\{V_i\}$ von X und einem System von Homöomorphismen $\psi_i\colon R_i^n \to V_i$ von R_i^n auf V_i, wobei R_i^n eine offene Menge im n-dimensionalen reellen Zahlenraum R^n sei, so daß

$$\psi_j^{-1}\psi_i\colon \quad \psi_i^{-1}(V_i \cap V_j) \to \psi_j^{-1}(V_i \cap V_j) \tag{17}$$

für jedes Paar i, j eine analytische Abbildung ist, während zwei solche Koordinatensysteme $\{V_i, \psi_i\}$, $\{V'_k, \psi'_k\}$ für X äquivalent heißen, wenn alle Abbildungen

$$\psi'^{-1}_k \psi_j \text{ und } \psi_j^{-1}\psi'_k \tag{17'}$$

analytisch sind ([11], S. 20ff.). Als 0-dimensionale analytische Mannigfaltigkeiten definieren wir noch die diskreten topologischen Räume. Man überlegt sich leicht, daß diese Definition der analytischen Mannigfaltigkeit mit derjenigen gleichbedeutend ist, die für die zusammenhängenden Komponenten des n-dimensionalen topologischen Raumes X fordert, daß sie n-dimensionale analytische Mannigfaltigkeiten im Sinne von Chevalley sind ([9], S. 68ff.). Die in [9], Ch. III, S. 68ff. entwickelten grundlegenden Begriffe und Tatsachen über zusammenhängende analytische Mannigfaltigkeiten lassen sich ohne weiteres sinngemäß auf den oben festgelegten erweiterten Begriff der analytischen Mannigfaltigkeit übertragen, so daß wir von ihnen stets ohne zusätzliche Bemerkungen Gebrauch machen werden.

Zur Konstruktion des Tangentialfaserraumes der analytischen Mannigfaltigkeit X gehen wir von einem analytischen Koordinatensystem $\{V_i, \psi_i\}$ für X aus und folgen der oben gegebenen Definition des analytischen Koordinatenraumes.

(1) In jedem Punkt $x \in X$ existiert ein n-dimensionaler Tangentialvektorraum $\mathfrak{X}_x$, bestehend aus allen Abbildungen der Klasse analytischer Funktionen in x in den Körper der reellen Zahlen, welche den Differentiationsbedingungen für Summe und Produkt genügen ([9], S. 76ff.). Wir definieren als Bündel $T(X) = \bigcup_{x \in X} \mathfrak{X}_x$, als Basisraum X, als Projektion $p(\mathfrak{x}) = x$ für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}_x$.

(2) Es sei die Faser $Y = R^n$. Als Koordinatenumgebungen nehmen wir die offenen Mengen V_i des gegebenen Koordinatensystems. In jedem V_i sind durch ψ_i die n analytischen infinitesimalen Transformationen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i^1}\right)_{\psi_i^{-1}(x)}, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_i^n}\right)_{\psi_i^{-1}(x)}$$

gegeben, die für jedes $x \in V_i$ eine Basis für $\mathfrak{X}_x$ bilden ([9], S. 77ff., S. 82ff.). Mit ihnen definieren wir als Koordinatenfunktionen

$$\Phi_j(x, r) = r^\nu \left(\frac{\partial f}{\partial x_i^\nu}\right)_{\psi_i^{-1}(x)},$$

wobei $r = (r^1, \ldots, r^n) \in R^n$ gesetzt wurde.

(3) ist dann erfüllt.

(4) Es sei $G = L_n$ die Gruppe aller reellen Matrizen vom Grade n als Liesche Gruppe, die auf R^n wie üblich operiere: $\bar{r}^\mu = s_\nu^\mu r^\nu$.

(5) Aus

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i^\nu}\right)_{\psi_i^{-1}(x)} = \left(\frac{\partial x_j^\mu}{\partial x_i^\nu}\right)_{\psi_i^{-1}(x)} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j^\mu}\right)_{\psi_j^{-1}(x)}$$

folgt wegen (2) sofort, daß die Abbildungen $\Phi_{j,x}^{-1}\, \Phi_{i,x}$ von der Form

$$r^\mu = \left(\frac{\partial x_j^\mu}{\partial x_i^\nu}\right)_{\psi_i^{-1}(x)} r^\nu$$

sind, also durch Elemente aus L_n bewirkt werden.

(6) Die Koordinatentransformation

$$\sigma_{ji}(x) = \left(s_{\nu,ji}^\mu(x)\right), \quad s_{\nu,ji}^\mu(x) = \left(\frac{\partial x_j^\mu}{\partial x_i^\nu}\right)_{\psi_i^{-1}(x)}$$

bilden wegen der Analytizität der Abbildungen (17) den Durchschnitt $V_i \frown V_j$ analytisch in L_n ab.

Auf die angegebene Weise ist jedem analytischen Koordinatensystem für X ein analytischer Koordinatenraum mit dem Basisraum X zugeordnet, und mit (17′) folgt leicht, daß äquivalenten Koordinatensystemen äquivalente Koordinatenräume entsprechen, so daß X eindeutig einen analytischen Faserraum, den *Tangentialfaserraum* $\{T(X)\}$ *von* X, bestimmt. Die Querschnitte in $\{T(X)\}$ sind gerade die analytischen infinitesimalen Transformationen in X ([9], S. 82ff.). $\{T(X)\}$ enthält auch Koordinatenräume, welche nicht zu den *holonomen*, d. h. auf die obige Weise aus einem Koordinatensystem von X ableitbaren gehören: Es besteht offenbar eine 1-1 Abbildung zwischen allen Koordinatenräumen von $\{T(X)\}$ und allen Systemen von n lokalen analytischen infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{e}_{\nu,i}(x)$, $x \in V_i$, zu einer offenen Überdeckung $\{V_i\}$ von X mit für alle $x \in V_i$ linear unabhängigen $\mathfrak{e}_{\nu,i}(x)$, nämlich die durch

$$\Phi_i(x, r) = r^\nu \mathfrak{e}_{\nu,i}(x) \tag{18}$$

definierte Abbildung, aus der man sofort die Existenz der soeben erwähnten *anholonomen* Koordinatenräume entnimmt. Die Querprojektionen eines beliebigen Koordinatenraumes von $\{T(X)\}$ sind analytische R^n-wertige lineare Differentialformen $p_i(\mathfrak{x}) = \left(\omega_i^1(\mathfrak{x}), \ldots, \omega_i^n(\mathfrak{x})\right)$. Für festes $x \in X$ gilt identisch

$$\Phi_{i,x}^{-1}(\mathfrak{x}) = \left(\omega_{i,x}^1(\mathfrak{x}), \ldots, \omega_{i,x}^n(\mathfrak{x})\right), \quad \omega_{i,x}^\mu\left(\mathfrak{e}_{\nu,i}(x)\right) = \delta_\nu^\mu. \tag{19}$$

1. 2. *Analytische Transformationsgruppen.* Den bei der Definition des analytischen Faserraumes bereits verwendeten Begriff der Lieschen Gruppe legen wir folgendermaßen fest: Eine im Sinne von 1. 1 mit einer analytischen Struktur versehene Gruppe G heiße *Liesche Gruppe*, wenn die Abbildung

$$\bar{S}\colon G \times G \to G, \quad \bar{S}(g, a) = a \cdot g^{-1}, \tag{1}$$

welche bekanntlich die 2. Parametergruppe von G definiert, analytisch ist. Danach ist eine zusammenhängende Liesche Gruppe eine analytische Gruppe im Chevalleyschen Sinne ([9], S. 100, Def. 1), während die Chevalleysche Definition der Lieschen Gruppe mit der unsrigen gleichbedeutend ist ([9], S. 129, Def. 1). Die Entwicklungen in [9], Ch. IV, S. 100ff. über analytische Gruppen lassen wieder eine sinngemäße Übertragung auf Liesche Gruppen zu, weshalb wir sie ständig auch für die letzteren in Anspruch nehmen können.

Die 1. Parametergruppe der Lieschen Gruppe G wird durch das Transformationsgesetz

$$S\colon G \times G \to G,\ S(g, a) = g \cdot a \tag{2}$$

definiert, das wegen (1) analytisch ist, und bei dem G durch die Linkstranslationen $S_g(a) = S(g, a)$ auf sich operiert. Die gegenüber allen Linkstranslationen invarianten infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{l}$ auf G, für die also

$$\mathfrak{l}(a) = (dS_{ag^{-1}})_g \mathfrak{l}(g) \tag{3}$$

identisch gilt, sind analytisch und bilden die Lie-Algebra $\mathfrak{L}(G)$ von G ([9], S. 101ff.). Zu jedem Tangentialvektor $\mathfrak{g}$ in $g \in G$ gibt es genau eine linksinvariante infinitesimale Transformation, also ein Element aus $\mathfrak{L}(G)$, die in g den Wert $\mathfrak{g}$ annimmt, nämlich die infinitesimale Transformation

$$\omega(g, \mathfrak{g}; a) = (dS_{ag^{-1}})_g \mathfrak{g} \tag{4}$$

als Funktion von $a \in G$. Dann ist $\omega(g, \mathfrak{g})$ — oder kurz ω — eine analytische $\mathfrak{L}(G)$-wertige lineare Differentialform auf G, die sogenannte *natürliche Differentialform*. Für festes $g \in G$ ist

$$\omega_g\colon \mathfrak{G}_g \to \mathfrak{L}(G), \quad \omega_g(\mathfrak{g}) = \omega(g, \mathfrak{g}) \tag{5}$$

ein Isomorphismus des Tangentialvektorraumes $\mathfrak{G}_g$ von G in g auf $\mathfrak{L}(G)$, dessen Umkehrung wir mit ω_g^{-1} bezeichnen.

Sei nun (G, Y, τ) eine analytische Transformationsgruppe, d. h. es gelte 1. 1, (4a). Wir ordnen (G, Y, τ) ein für allemal die analytischen Abbildungen

$$\tau_g\colon Y \to Y, \quad \tau_g(y) = \tau(g, y), \tag{6}$$

$$\tau_y^*\colon G \to Y, \quad \tau_y^*(g) = \tau(g, y) \tag{7}$$

zu. Im Falle der 1. Parametergruppe (2) von G sind dies die Links- bzw. Rechtstranslationen von G auf sich. In dieser Arbeit wird nun der Ausdruck

$$(d\tau_y^*)_e \omega_e^{-1}(\mathfrak{l}), \quad y \in Y, \mathfrak{l} \in \mathfrak{L}(G), \tag{8}$$

eine vorherrschende Rolle spielen. Wir behaupten über ihn zunächst die beiden folgenden Sätze:

Satz 1. *Bei festem $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}(G)$ und variablem $y \in Y$ ist* (8) *eine analytische infinitesimale Transformation auf Y. Die Zuordnung $\mathfrak{l} \to (d\tau_y^*)_e \omega_e^{-1}(\mathfrak{l})$ definiert einen Operator-Homomorphismus von $\mathfrak{L}(G)$ in die Lie-Algebra aller analytischen infinitesimalen Transformationen auf Y* ([9], S. 82ff.). *Operiert G effektiv auf Y, so handelt es sich um einen Isomorphismus.*

Satz 2. *Bei festem $y \in Y$ und variablem $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}(G)$ ist* (8) *eine lineare Abbildung von $\mathfrak{L}(G)$ in den Tangentialvektorraum $\mathfrak{Y}_y$ von Y in y, dessen Kern $\mathfrak{K}$ die Lie-Algebra $\mathfrak{L}(H)$ der Fixpunktgruppe H von y in G ist.*

In Satz 1 ist zunächst die Homomorphie

$$(d\tau_y^*)_e \omega_e^{-1}([\mathfrak{l}, \mathfrak{l}']) = [(d\tau_y^*)_e \omega_e^{-1}(\mathfrak{l}),\ (d\tau_y^*)_e \omega_e^{-1}(\mathfrak{l}')] \tag{9}$$

nicht selbstverständlich. Zum Beweis betrachte man bei gegebenem $y \in Y$ das durch

$$(d\alpha_y)_g = (d\tau^*_{\alpha_y})_e \, (d\bar{S}_g)_g \tag{10}$$

definierte System von partiellen Differentialgleichungen für die gesuchte Abbildung $\alpha_y\colon G \to Y$ mit der Anfangsbedingung $\alpha_y(e) = y$. (10) wird, wie man leicht nachrechnet, für jedes y durch die Abbildung τ^*_y gelöst, so daß die Integrabilitätsbedingungen dieses Systems identisch in y erfüllt sind. Diese sind aber, wie aus bekannten Tatsachen der Lieschen Theorie folgt, gerade durch (9) gegeben. Die weitere Aussage von Satz 1 folgt erst aus dem Satz 2.

Zum Beweis des letzteren bemerken wir zunächst, daß H als Fixpunktgruppe abgeschlossen in G ist. Nach einem bekannten Satz von Cartan ist H daher Liesche Untergruppe von G, d. h. H selbst ist Liesche Gruppe und die Inklusionsabbildung $I\colon H \to G$ regulär ([9], S. 107, Def. 1, S. 130ff.). Die Abbildung $\tau^*_y I\colon H \to Y$ ist konstant, also gilt $d(\tau^*_y I) = 0$, mithin $\mathfrak{L}(H) \leq \mathfrak{K}$. Andererseits ist $\mathfrak{K}$ eine Lie-Algebra in $\mathfrak{L}(G)$: Die in dem (festen) Punkt y verschwindenden infinitesimalen Transformationen (8) bilden eine Lie-Algebra, also wegen (9) auch $\mathfrak{K}$. Daher gibt es eine zusammenhängende Liesche Gruppe $\mathfrak{K}$, Liesche Untergruppe von G, mit der Lie-Algebra $\mathfrak{K}$ ([9], S. 109, Theorem 1). Sei $J\colon K \to G$ die Inklusionsabbildung. Dann gilt $d(\tau^*_y J) = 0$ auf Grund der Voraussetzung über $\mathfrak{K}$. Daher ist die Abbildung $\tau^*_y J\colon K \to Y$ konstant ([9], S. 80, Prop. 4), und zwar mit dem Wert y, da jedenfalls $\tau^*_y(J(e)) = y$ ist. Also gilt $K \leq H$ und deswegen auch $\mathfrak{K} \leq \mathfrak{L}(H)$, mithin $\mathfrak{K} = \mathfrak{L}(H)$.

Nun folgt auch die letzte Aussage von Satz 1. Ist nämlich $(d\tau^*_y)_e \, \omega_e^{-1}(\mathfrak{l}) = 0$ für alle $y \in Y$ und ein $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}(G)$, so bedeutet dies wegen Satz 2, daß $\mathfrak{l}$ in $\bigcap_{y \in Y} \mathfrak{L}(H_y)$ liegt, wenn H_y die Fixpunktgruppe von y bezeichnet. Es gilt aber $\bigcap_{y \in Y} \mathfrak{L}(H_y) = \mathfrak{L}(\bigcap_{y \in Y} H_y)$, und wegen $\bigcap_{y \in Y} H_y = \{e\}$ folgt $\mathfrak{l} = 0$.

Wenn G transitiv auf Y operiert, so ist bekanntlich τ^*_y eine Abbildung von G auf Y, deren inverse Bilder gerade die Linksnebenklassen von G nach der Fixpunktgruppe H_y von y in G sind: τ^*_y induziert eine 1-1 Abbildung

$$\iota_y\colon \; G/H_y \to Y, \quad \iota_y(g \cdot H_y) = \tau^*_y(g) \tag{11}$$

von G/H_y auf Y. Da H_y abgeschlossen in G ist, besitzt auch G/H_y eine analytische Struktur, so daß G analytische Transformationsgruppe von G/H_y bezüglich des Transformationsgesetzes

$$\varrho_y\colon \; G \times G/H_y \to G/H_y, \quad \varrho_y(g, aH_y) = g \cdot aH_y \tag{12}$$

ist ([9], S. 109ff.). Es gilt der folgende

Satz 3. *Ist (G, Y, τ) eine transitive analytische Transformationsgruppe, so ist für jedes $y \in Y$ die Abbildung* (11) *ein analytischer Isomorphismus von G/H_y auf Y, für den überdies*

$$\iota_y(\varrho_y(g, aH_y)) = \tau(g, \iota_y(aH_y)) \tag{13}$$

gilt.

Dieser bekannte Satz besagt, daß Y als Faktorraum aufgefaßt werden kann. Wir geben einen Beweis, da wir die Hilfssätze dazu ohnehin brauchen. Die Beziehung (13) folgt sofort aus (11) und (12). Die Analytizität von ι_y folgt aus dem evidenten

Hilfssatz 1. *Es sei in der analytischen Mannigfaltigkeit V eine Äquivalenzrelation gegeben. Die Menge F der Äquivalenzklassen sei ebenfalls eine analytische Mannigfaltigkeit und die natürliche Abbildung $\nu\colon V \to F$ analytisch, sowie überall im Kleinen analytisch umkehrbar. Ist dann $\chi\colon V \to W$ eine analytische Abbildung von V in eine weitere analytische*

Mannigfaltigkeit W und hängt χ nur von den Klassen der Äquivalenzrelation in V ab, so ist die von χ induzierte Abbildung ι: $F \to W$ ebenfalls analytisch.

Mit $V = G$, $F = G/H_y$, $W = Y$ und $\chi = \tau_y^*$ folgt die Analytizität von ι_y, da die natürliche Abbildung ν: $G \to G/H_y$ analytisch und überall im Kleinen analytisch umkehrbar ist ([9], S. 109ff.). Daß ι_y überdies ein analytischer Isomorphismus ist, folgt mit Satz 2, aus dem man zunächst entnimmt, daß ι_y regulär ist: Der Tangentialvektorraum von G/H_y in $\{H_y\}$ ist isomorph zum Faktorraum $\mathfrak{L}(G)/\mathfrak{L}(H_y)$, und $d\tau_y^*$ induziert die natürliche Abbildung ν: $\mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(G)/\mathfrak{L}(H_y)$. Aus $d\iota_y(\mathfrak{l}^*) = 0$ mit $\mathfrak{l}^* \in \mathfrak{L}(G)/\mathfrak{L}(H_y)$ folgt dann $d\tau_y^*(\mathfrak{l}) = 0$ für $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}(G)$ mit $\nu(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}^*$. Satz 2 liefert nun $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}(H_y)$, also $\mathfrak{l}^* = 0$. In einem beliebigen Punkt von G/H_y folgt nun die Regularität mit Hilfe von (12). Eine reguläre 1-1 Abbildung einer analytischen Mannigfaltigkeit auf eine andere ist aber stets ein analytischer Isomorphismus.

Satz 4. *Sei die Liesche Gruppe G transitive Transformationsgruppe einer Menge Y bezüglich eines Transformationsgesetzes τ: $G \times Y \to Y$. Wenn die Fixpunktgruppen der Operationen von G auf Y abgeschlossen sind, so existiert auf Y eine durch G und τ eindeutig bestimmte analytische Struktur, so daß (G, Y, τ) eine analytische Transformationsgruppe ist.*

Die analytische Struktur auf Y wird durch (11) wegen (13) eindeutig definiert.

Satz 5. *Sei (G, Y, τ) eine transitive analytische Transformationsgruppe. Nach Festlegung eines $y_0 \in Y$ mit der Fixpunktgruppe H in G sind G, $\tau_{y_0}^*$, Y Bündel, Projektion und Basisraum eines analytischen Faserraumes $\{G\}$ mit der Faser und Gruppe H, wobei H durch Linkstranslationen auf sich operiert.*

Wir fassen uns beim Beweis dieses Satzes kurz, da er formal wie der des entsprechenden topologischen Satzes über Faktorräume verläuft, der ausführlich bei Steenrod zu finden ist ([11], S. 30ff.). Die Konstruktion eines Koordinatenraumes für $\{G\}$ geht von einer analytischen Umkehrabbildung φ: $W \to G$ von $\tau_{y_0}^*$ in einer Umgebung W von y_0 aus. Eine solche ist nach [9], S. 109ff. für die natürliche Abbildung von G in G/H und damit wegen Satz 3 auch für $\tau_{y_0}^*$ stets vorhanden. Indexmenge von (G) sei G, die Koordinatenumgebungen seien $W_g = g \cdot W$. Weiter setzen wir

$$\varphi_g\colon W_g \to G, \quad \varphi_g(y) = g\varphi(g^{-1}y), \tag{14}$$

und definieren als Koordinatenfunktionen

$$\Phi_g\colon W_g \times H \to \tau_{y_0}^{*\,-1}(W_g), \quad \Phi_g(y, h) = \varphi_g(y)\, h. \tag{15}$$

Man zeigt nun leicht mit Hilfe der Projektionen, daß jedes Φ_g ein analytischer Isomorphismus ist, so daß also die a priori auf G vorhandene analytische Struktur mit der durch die Φ_g definierten übereinstimmt. Die zugehörigen Koordinatentransformationen sind offenbar durch

$$g_{ba}\colon W_a \cap W_b \to H, \quad g_{ba}(y) = \varphi_b^{-1}(y) \cdot \varphi_a(y) \tag{16}$$

gegeben. Ihre Analytizität folgt aus dem

Hilfssatz 2. *Sei V eine analytische Mannigfaltigkeit, G eine Liesche Gruppe und H eine Liesche Untergruppe von G. Ist dann χ: $V \to G$ eine analytische Abbildung mit $\chi(v) \in H$ für alle $v \in V$, so ist χ auch als Abbildung von V in H analytisch.*

Auf den Beweis dieses Hilfssatzes wollen wir nicht näher eingehen. Er ergibt sich ohne weiteres aus [9], S. 95, Prop. 1 mit Hilfe der Überlegungen in [9], S. 107ff.

Wie bei Steenrod beweist man schließlich, daß die Konstruktion von $\{G\}$ nicht von dem ausgewählten φ abhängt. (14) ist ein System von lokalen Querschnitten in $\{G\}$, d. h. es gilt

$$\tau_{y_0}^*(\varphi(y)) = y. \tag{17}$$

1. 3. In diesem Abschnitt wollen wir die Beziehungen untersuchen, welche zwischen der Reduzierbarkeit der Gruppe eines analytischen Faserraumes und der Existenz von Querschnitten in einem schwach assoziierten Faserraum bestehen. Es wird sich um eine eingehendere Betrachtung der Verhältnisse handeln, welche der Satz 9, 5 in Steenrods Buch für den topologischen Fall nur teilweise zum Ausdruck bringt ([11], S. 45).

Es sei $\{B\}$ ein analytischer Faserraum mit der Faser Y. Ein Querschnitt f in $\{B\}$ heiße *konstant mit dem Wert $y \in Y$ in einem Koordinatenraum (B) von $\{B\}$*, wenn für seine Komponenten f_i in (B) die Gleichung $f_i(x) = y$ identisch gilt. f heiße *konstant mit dem Wert y in $\{B\}$*, wenn es in jedem Koordinatenraum von $\{B\}$ konstant mit dem Wert y ist.

Diese Begriffsbildungen stehen in Beziehung zu einigen weiteren, welche die Gruppe G von $\{B\}$ betreffen. Es sei H eine Liesche Untergruppe von G. Ein Koordinatenraum (B) von $\{B\}$ heiße *auf H reduzierbar*, wenn $g_{ji}(x) \in H$ identisch für die Koordinatentransformationen g_{ji} von (B) gilt. $\{B\}$ selbst heiße auf H reduzierbar, wenn einer seiner Koordinatenräume auf H reduzierbar ist. Ist $\{B\}$ auf H reduzierbar, so entspricht jedem seiner auf H reduzierbaren Koordinatenräume (B) ein analytischer Koordinatenraum $(B)_{\text{red}}$ mit der Gruppe H, den man aus (B) erhält, indem man G durch H ersetzt. Diese Ersetzung müssen wir durch zwei Bemerkungen rechtfertigen. H ist als Liesche Untergruppe von G selbst eine Liesche Gruppe und die Inklusionsabbildung $H \subseteq G$ regulär. Daher ist mit (G, Y, τ) auch $(H, Y, \tau_{\text{red}})$, $\tau_{\text{red}} = \tau \mid (H \times Y)$ eine effektive analytische Transformationsgruppe. Zweitens sind wegen 1. 2, Hilfssatz 2 die Koordinatentransformationen $g_{ji}\colon V_i \cap V_j \to H$ von $(B)_{\text{red}}$ analytisch. $(B)_{\text{red}}$ heiße *der auf H reduzierte Koordinatenraum von (B)* und *ein auf H reduzierter Koordinatenraum von $\{B\}$*. Wegen 1. 1, (12′) kommen mit jedem $(B)_{\text{red}}$ offenbar alle zu $(B)_{\text{red}}$ äquivalenten Koordinatenräume als auf H reduzierte Koordinatenräume von $\{B\}$ vor. Die Gesamtheit der auf H reduzierten Koordinatenräume von $\{B\}$ zerfällt daher in Klassen, deren jede einen analytischen Faserraum $\{B\}_{\text{red}}$ mit der Gruppe H bildet. Jedes so zu erhaltende $\{B\}_{\text{red}}$ heiße *ein auf H reduzierter Faserraum von $\{B\}$*.

Wir führen weiter den Begriff des schwach assoziierten Faserraumes ein. Sei $\{B\}$ ein analytischer Faserraum mit der Gruppe G, $\{B^*\}$ ein analytischer Faserraum mit demselben Basisraum, der Faser Y^* und der Gruppe G^*. Es sei $\{B^*\}$ in folgender Weise mit $\{B\}$ verknüpft: 1. Ein analytischer Homomorphismus $\nu\colon G \to G^*$ bildet G auf G^* ab. 2. Es gibt ein $(B) \in \{B\}$ und ein $(B^*) \in \{B^*\}$, so daß $J^* = J$, $V_i^* = V_i$ und $g_{ji}^* = \nu g_{ji}$ identisch gilt. Dann nennen wir $\{B^*\}$ einen *bezüglich ν zu $\{B\}$ schwach assoziierten Faserraum*. Ist insbesondere ν ein Isomorphismus, so liegt ein Gleichheitsbegriff vor, und $\{B^*\}$, $\{B\}$ heißen *bezüglich ν assoziiert*. Ist $\{B^*\}$ zu $\{B\}$ schwach assoziiert, so läßt sich die Gruppe G von $\{B\}$ auf natürliche Weise zu einer analytischen Transformationsgruppe $(G, Y^*, \varkappa)$ der Faser Y^* von $\{B^*\}$ machen, indem man $\varkappa$ durch

$$\varkappa(g, y^*) = \tau^*\big(\nu(g), y^*\big) \tag{1}$$

definiert.

Es sei $\{B\}$ ein analytischer Faserraum und $\{B^*\}$ zu $\{B\}$ schwach assoziiert bezüglich ν. Unter einer *Bindung von $\{B^*\}$ an $\{B\}$* verstehen wir eine Abbildung $\eta\colon \{B\} \to \{B^*\}$, die folgenden Bedingungen genügt: 1. Ist $(B) \in \{B\}$ gegeben, so gilt für $(B^*) = \eta(B)$ identisch $J^* = J$, $V_i^* = V_i$ und $g_{ji}^* = \nu g_{ji}$. 2. Sind $\bar{g}_{kj}$ die Äquivalenztransformationen zweier $(B), (B)' \in \{B\}$, so seien $\bar{g}_{kj}^* = \nu \bar{g}_{kj}$ die Äquivalenztransformationen von $(B^*) = \eta(B)$ und $(B^*)' = \eta(B)'$. Es gibt stets eine Bindung von $\{B^*\}$ an $\{B\}$ und durch Vorgabe eines $(B) \in \{B\}$ und des Bildes $(B^*) = \eta(B) \in \{B^*\}$ ist η eindeutig bestimmt, wie man sofort mit Hilfe von 1. 1, Satz 1 nachweist.

Ehe wir nun die eingangs erwähnten Beziehungen in einem Satz aussprechen, machen wir noch die folgenden Bemerkungen: Sei $\{B^*\}$ zu $\{B\}$ schwach assoziiert, und seien H bzw. $H^* = \nu(H)$ Liesche Untergruppen von G bzw. G^*. Jede Bindung η von $\{B^*\}$ an $\{B\}$ induziert eine 1-1 Abbildung $\bar{\eta}$ der Menge aller auf H reduzierten Faserräume $\{B\}_{\text{red}}$ von $\{B\}$ in die Menge aller auf H^* reduzierten Faserräume $\{B^*\}_{\text{red}}$ von $\{B^*\}$. Es ist $\{B^*\}_{\text{red}} = \bar{\eta}\{B\}_{\text{red}}$ zu $\{B\}_{\text{red}}$ schwach assoziiert bezüglich des induzierten Homomorphismus $\bar{\nu}$: $H \to H^*$, und η induziert eine Bindung η_{red} von $\{B^*\}_{\text{red}} = \bar{\eta}\{B\}_{\text{red}}$ an $\{B\}_{\text{red}}$. Ist insbesondere H die Fixpunktgruppe eines $y^* \in Y^*$ bezüglich (1), so ist H^* die Fixpunktgruppe von y^* in G^*. Die Gruppen H und H^* sind dann beide abgeschlossen in G bzw. G^*, also beide Liesche Untergruppen von G bzw. G^*, und die Existenz von $\{B\}_{\text{red}}$ mit der Gruppe H zieht die von $\{B^*\}_{\text{red}} = \bar{\eta}\{B\}_{\text{red}}$ mit der Gruppe H^* nach sich.

Reduktionssatz. *Es sei der Faserraum $\{B^*\}$ mit transitiver Transformationsgruppe schwach assoziiert zu dem analytischen Faserraum $\{B\}$, und es sei η eine Bindung von $\{B^*\}$ an $\{B\}$. Dann gibt es zu jedem $y_0^* \in Y^*$ eine natürliche 1-1 Abbildung zwischen allen Querschnitten f^* in $\{B^*\}$ und allen auf die Fixpunktgruppe H von y_0^* in G reduzierten Faserräumen $\{B\}_{\text{red}}$ von $\{B\}$. Die Abbildung ist derart, daß f^* konstant mit dem Wert y_0^* in $\{B^*\}_{\text{red}} = \bar{\eta}\{B\}_{\text{red}}$ ist.*

Es sei $y_0^* \in Y^*$ beliebig gegeben. Wir führen den Beweis des Reduktionssatzes in mehreren Schritten durch. Zunächst zeigen wir, daß es zu gegebenem Querschnitt f^* in $\{B^*\}$ einen auf H reduzierbaren Koordinatenraum $(B)' \in \{B\}$ gibt, so daß f^* in $(B^*)' = \eta(B)'$ konstant mit dem Wert y_0^* ist. Es ist klar, daß ein $(B)' \in \{B\}$, für das f^* konstant mit dem Wert y_0^* in $\eta(B)'$ ist, auf H reduziert werden kann. Denn unter unseren Voraussetzungen gilt wegen 1. 1, (14) die Formel $f_i^{*\prime}(x) = g'_{ik}(x)\, f_k^{*\prime}(x)$ mit den Koordinatentransformationen g_{ik}^* von $(B)'$. Aus $f_k^{*\prime}(x) = y_0^*$ folgt daher $g'_{ik}(x) \in H$, d. h. $(B)'$ ist auf H reduzierbar. Sei nun f^* gegeben, sei (B) ein beliebiger Koordinatenraum von $\{B\}$ und $(B^*) = \eta(B)$. Da auch G transitiv auf Y^* operiert, ist es nach 1. 2, Satz 5 das Bündel eines Faserraumes $\{G\}$ mit dem Basisraum Y^*. Sei $\{W_h, \varphi_h\}$ das System (14) von lokalen Querschnitten des in 1. 2 konstruierten Koordinatenraumes von $\{G\}$. Die Mengen $f_i^{*-1}(W_h) \subseteq X$, $i \in J$, $h \in G$ bilden wegen der Stetigkeit der f_i eine offene Überdeckung von X. Wir definieren die analytischen Abbildungen

$$\lambda_{hi}\colon f_i^{*-1}(W_h) \to G, \quad \lambda_{hi}(x) = \varphi_h\big(f_i^*(x)\big)$$

und mit diesen die ebenfalls analytischen Abbildungen

$$\bar{g}_{hj,i}\colon V_i \cap f_j^{*-1}(W_h) \to G, \quad \bar{g}_{hj,i}(x) = \lambda_{hi}^{-1}(x)\, g_{ji}(x).$$

Dann gilt

$$\bar{g}_{hk,j}(x)\, g_{ji}(x) = \bar{g}_{hk,i}(x)$$

für $x \in V_i \cap V_j \cap f_k^{*-1}(W_h)$, so daß wir (B) wegen 1. 1, Satz 1 mit den $\bar{g}_{hj,i}$ in einen neuen Koordinatenraum $(B)'$ mit den Koordinatenumgebungen $f_j^{*-1}(W_h)$ transformieren können. Dann transformieren sich die Komponentensysteme von f^* in $\eta(B)$ bzw. $\eta(B)'$ mit den $\bar{g}_{hk,j}$ ineinander. Unter Beachtung der Tatsache, daß die φ_h ein System von lokalen Querschnitten in $\{G\}$ bilden, erhalten wir ohne weiteres

$$\begin{aligned} f_{hj}^{*\prime}(x) &= \bar{g}_{hj,i}(x)\, f_i^*(x) = \lambda_{hj}^{-1}(x)\, g_{ji}(x)\, f_i^*(x) \\ &= \varphi_h^{-1}\big(f_j^*(x)\big)\, f_j^*(x) = y_0^*, \end{aligned}$$

d. h. f^* ist konstant mit dem Wert y_0^* in $(B)'$.

Wir zeigen weiter: Ist für (B), $(B)' \in \{B\}$ der Querschnitt f^* konstant mit dem Wert y_0^* in $\eta(B)$, $\eta(B)'$, so daß also (B) und $(B)'$ auf H reduzierbar sind, so sind die

reduzierten Koordinatenräume $(B)_{\text{red}}$, $(B)'_{\text{red}}$ von (B), $(B)'$ äquivalent. Auf Grund unserer Voraussetzungen gilt nämlich $f_k^{*\prime}(x) = \bar{g}_{kj}(x)\, f_j^*(x)$ mit den Äquivalenztransformationen $\bar{g}_{kj}$ von (B), $(B)'$. Aus $f_k^{*\prime}(x) = f_j^*(x) = y_0^*$ folgt dann sofort $\bar{g}_{kj}(x) \in H$, d. h. $(B)_{\text{red}}$, $(B)'_{\text{red}}$ sind äquivalent. Wir ordnen nun f^* die Gesamtheit derjenigen $(B) \in \{B\}$ zu, für die f^* in $\eta(B)$ konstant mit dem Wert y_0^* ist. Nach dem bisher Bewiesenen wissen wir, daß diese Gesamtheit nicht leer ist, daß jedes (B) derselben auf H reduzierbar ist und daß die auf H reduzierten Koordinatenräume $(B)_{\text{red}}$ alle untereinander äquivalent sind. Damit ist f^* eindeutig ein auf H reduzierter Faserraum $\{B\}_{\text{red}}$ zugeordnet.

Wir müssen nun noch auf die im Reduktionssatz behaupteten Eigenschaften der hergestellten Abbildung eingehen. Daß es sich um eine 1-1 Abbildung handelt, ist auf Grund der Konstruktion ohne weiteres klar. Daß jedes auf H reduzierte $\{B\}_{\text{red}}$ als Bild vorkommt, sieht man so ein: Seien $\{B\}_{\text{red}}$ und ein $(B) \in \{B\}$ mit $(B)_{\text{red}} \in \{B\}_{\text{red}}$ gegeben. Dann gilt $g_{ji}(x)\, y_0^* = y_0^*$ identisch. Daher ist durch $f_i^*(x) = y_0^*$ wegen 1. 1, (14) ein Querschnitt f^* in $\{B^*\}$ definiert, der in $(B^*) = \eta(B)$ konstant mit dem Wert y_0^* ist. Bei unserer Abbildung hat dieses f^* offenbar als Bild das gegebene $\{B\}_{\text{red}}$. Es ist schließlich einzusehen, daß f^* in $\{B^*\}_{\text{red}} = \eta\{B\}_{\text{red}}$ konstant ist. Sei $(B^*)_{\text{red}} \in \{B^*\}_{\text{red}}$ gegeben. Es gibt ein $(B^*)'_{\text{red}} \in \{B^*\}_{\text{red}}$, in dem f^* konstant mit dem Wert y_0^* ist. Die Äquivalenztransformationen $\bar{g}_{kj}^*$ von $(B^*)_{\text{red}}$ und $(B^*)'_{\text{red}}$ liegen in H^*. Aus 1. 1, (14′) folgt dann, daß f^* auch in $(B^*)_{\text{red}}$ konstant mit dem Wert y_0^* ist.

Die durch den Reduktionssatz bei gegebenem $y_0^* \in Y^*$ gewonnene Abbildung zwischen den Querschnitten in $\{B^*\}$ und den auf H reduzierten Faserräumen von $\{B\}$ heiße *die zu y_0^* gehörige Reduktionsabbildung*. Beispiele für Faserräume $\{B\}$, $\{B^*\}$, welche die Voraussetzungen des Reduktionssatzes erfüllen, werden wir in § 2 angeben.

Aus § 1 werden vor allem die Sätze 2 und 4 aus 1. 2 und der Reduktionssatz auch weiterhin eine Rolle spielen.

§ 2. Gruppenfelder in Faserräumen.

2. 1. Wir definieren in § 2 den Begriff des Gruppenfeldes in einem analytischen Faserraum $\{B\}$ als Querschnitt in einem gewissen zu $\{B\}$ schwach assoziierten Faserraum. Diese Definition ist ein erster Schritt zur Verallgemeinerung des Begriffes der Mannigfaltigkeit mit metrischem Zusammenhang im Sinne von Cartan ([5], S. 390ff., [6], S. 319ff., [7], S. 9).

Es sei $\{B\}$ ein analytischer Faserraum mit der Gruppe G. Wir führen einen Koordinatenraum $(B) \in \{B\}$ ein und transformieren G für jedes $x \in V_i$ durch

$$G_x = \Phi_{i,x}\, G \Phi_{i,x}^{-1} \tag{1}$$

in eine analytische Transformationsgruppe G_x der Faser Y_x. Die Schreibweise trägt bereits der Tatsache Rechnung, daß die linke Seite von (1) weder von i noch von (B) abhängt, wie man leicht nachrechnet. In $\{B\}$ ist also durch (1) ein Gesetz definiert, welches jedem Punkt $x \in X$ eine zu G isomorphe Liesche Gruppe G_x zuordnet, die auf Y_x analytisch operiert. Dieses Gesetz nennen wir *das natürliche Gruppenfeld in* $\{B\}$.

Sei nun allgemeiner K ein abgeschlossener Normalteiler von G. Wir führen wieder einen Koordinatenraum $(B) \in \{B\}$ ein und transformieren K wie in (1) in einen abgeschlossenen Normalteiler von G_x:

$$K_x = \Phi_{i,x}\, K \Phi_{i,x}^{-1}. \tag{2}$$

Wieder ist K_x von i und (B) unabhängig. Es gilt nämlich wegen 1. 1, (6) und der Normalteilereigenschaft von K

$$\begin{aligned}\Phi_{j,x} K \Phi_{j,x}^{-1} &= \Phi_{i,x} g_{ji}^{-1}(x)\, K g_{ji}(x)\, \Phi_{i,x}^{-1} \\ &= \Phi_{i,x} K \Phi_{i,x}^{-1},\end{aligned}$$

und ebenso folgt mit 1. 1, (6′) die Unabhängigkeit von (B). Die damit gegebene, durch K eindeutig bestimmte Zuordnung $x \to K_x$ nennen wir ein *normales Gruppenfeld in* $\{B\}$.

Um schließlich den Begriff des Gruppenfeldes in allgemeinster Form angeben zu können, geben wir uns eine Klasse Q von konjugierten abgeschlossenen Untergruppen von G vor. G operiert transitiv auf Q bezüglich des Transformationsgesetzes

$$\beta\colon G \times Q \to Q, \quad \beta(g, K) = gKg^{-1}. \tag{3}$$

Die Fixpunktgruppe H eines $K \in Q$ ist dann offenbar der Normalisator von K in G. Nun ist aber der Normalisator H einer abgeschlossenen Untergruppe K einer topologischen Gruppe G ebenfalls abgeschlossen in G, eine Tatsache, die darauf beruht, daß H die Fixgruppe von K ist, wenn G durch die inneren Automorphismen auf sich operiert. Die Fixpunktgruppen von (3) sind also abgeschlossen in G. Daher können wir 1. 2, Satz 4 anwenden: Auf Q existiert eine durch (3) eindeutig bestimmte analytische Struktur, so daß G transitive analytische Transformationsgruppe von Q bezüglich (3) ist.

Wir wollen nun dem analytischen Faserraum $\{B\}$ einen durch (3) eindeutig bestimmten, zu $\{B\}$ schwach assoziierten Faserraum $\{B^*\}$ mit der zu (3) gehörigen effektiven Transformationsgruppe (G^*, Q, λ) zuordnen. Eine Untergruppe $K_x \leqq G_x$ heiße *Q-zulässig*, wenn nach Einführung von $(B) \in \{B\}$ die Untergruppe $\Phi_{i,x}^{-1} K_x \Phi_{i,x}$ von G zu Q gehört, eine von i und (B) unabhängige Definition. Die Q-zulässigen Untergruppen von G_x bilden eine Klasse Q_x von konjugierten abgeschlossenen Untergruppen. Wir definieren als Bündel und Projektion von $\{B^*\}$

$$B^* = \bigcup_{x \in X} Q_x, \quad p^*(b^*) = x \text{ für } b^* \in Q_x.$$

Sei weiter $(B) \in \{B\}$ gegeben. Jeder Koordinatenfunktion Φ_i von (B) ordnen wir die 1-1 Abbildung

$$\Phi_i^*\colon V_i \times Q \to p^{*-1}(V_i), \quad \Phi_i^*(x, K) = \Phi_{i,x} K \Phi_{i,x}^{-1} \tag{4}$$

zu. Dann gilt offenbar

$$\Phi_{j,x}^{*-1} \Phi_{i,x}^*(K) = g_{ji}(x)\, K g_{ji}^{-1}(x). \tag{5}$$

Daher bilden $B^*, p^*, X, Q, G^*, \lambda, V_i, \Phi_i^*$ einen analytischen Koordinatenraum (B). Sind ferner (B), $(B)' \in \{B\}$ gegeben, so haben wir

$$\Phi_{k,x}^{*-1} \Phi_{j,x}^*(K) = \bar{g}_{kj}(x)\, K \bar{g}_{kj}^{-1}(x), \tag{5'}$$

d. h. (B^*) und $(B^*)'$ sind äquivalent. Damit haben wir den zu $\{B\}$ schwach assoziierten Faserraum $\{B^*\}$ zugleich mit einer natürlichen Bindung η an $\{B\}$. Wir nennen $\{B^*\}$ den *Q-Faserraum von* $\{B\}$.

Unter einem *Gruppenfeld der Natur Q in* $\{B\}$ verstehen wir jeden Querschnitt im Q-Faserraum von $\{B\}$. Durch eine Gruppenfeld in $\{B\}$ ist also jedem $x \in X$ eine analytische Transformationsgruppe K_x von Y_x zugeordnet. Ist $\{B\}$ insbesondere der Tangentialfaserraum seines Basisraumes X, so sprechen wir von einem *linearen Gruppenfeld in X*. Die normalen Gruppenfelder ergeben sich bei beliebigem $\{B\}$ im Spezialfall, daß Q nur aus einer einzigen Untergruppe K von G besteht.

Für einen analytischen Faserraum $\{B\}$ und einen Q-Faserraum $\{B^*\}$ von $\{B\}$ sind die Voraussetzungen des Reduktionssatzes aus 1. 3 erfüllt. In unserer jetzigen Terminologie können wir diesen folgendermaßen aussprechen:

Satz 1. *Es sei $\{B\}$ ein analytischer Faserraum mit der Gruppe G und Q eine Klasse konjugierter abgeschlossener Untergruppen von G. Zu jedem $K \in Q$ gibt es eine natürliche 1-1 Abbildung zwischen allen Gruppenfeldern f^* der Natur Q in $\{B\}$ und allen auf den Normalisator H von K in G reduzierten Faserräumen $\{B\}_{\text{red}}$ von $\{B\}$. Die Abbildung ist derart, daß f^* ein normales Gruppenfeld im zugeordneten $\{B\}_{\text{red}}$ ist.*

2. 2. Es sei $\{B\}$ ein analytischer Faserraum, $\{\bar{B}\}$ ein zu $\{B\}$ schwach assoziierter Faserraum mit transitiver Transformationsgruppe und ζ eine Bindung von $\{\bar{B}\}$ an $\{B\}$. Wegen 1. 1, (1) operiert auch die Gruppe G von $\{B\}$ transitiv auf der Faser $\bar{Y}$ von $\{\bar{B}\}$. Ordnet man nun jedem $\bar{y} \in \bar{Y}$ seine Fixpunktgruppe $K_{\bar{y}}$ in G zu, so entsteht eine Abbildung μ von $\bar{Y}$ auf eine Klasse Q von konjugierten abgeschlossenen Untergruppen von G, für die

$$\mu\colon\ \bar{Y} \to Q, \quad \beta(g, \mu(\bar{y})) = \mu(\varkappa(g, \bar{y})) \tag{1}$$

identisch gilt, wobei β durch 2. 1, (3) und $\varkappa$ durch 1. 3, (1) definiert ist. Eine konkretere Schreibweise für (1) ist

$$g K_{\bar{y}} g^{-1} = K_{g\bar{y}}, \quad g \in G, \ \bar{y} \in \bar{Y}. \tag{2}$$

Mit 1. 2, (11) folgt aus (1) leicht, da $\beta\mu$ analytisch ist. Andererseits operiert jede Gruppe G_x des natürlichen Gruppenfeldes in $\{B\}$ transitiv und analytisch auf der Faser Y_x von $\{\bar{B}\}$ bezüglich des Transformationsgesetzes

$$\varkappa_x(g_x, \bar{b}) = \bar{\Phi}_{i,x}(\varkappa(\Phi_{i,x}^{-1} g_x \Phi_{i,x}, \bar{\Phi}_{i,x}^{-1}(\bar{b}))), \tag{3}$$

das von i und den zu seiner Darstellung benutzten Koordinatenräumen $(B) \in \{B\}$ und $(\bar{B}) = \zeta(B) \in \{\bar{B}\}$ unabhängig ist. Wegen (1) bestehen die Fasern Q_x des Q-Faserraumes $\{B^*\}$ von $\{B\}$ gerade aus den Fixpunktgruppen der Operationen (3) von G_x auf $\bar{Y}_x$. Ordnet man daher jedem $\bar{b} \in \bar{B}$ seine Fixpunktgruppe zu, so entsteht eine Abbildung M von $\bar{B}$ auf B^*, welche die Faser $\bar{Y}_x$ auf die Faser Q_x abbildet und die sich nach Einführung von (B) und $(\bar{B}) = \zeta(B)$ durch

$$\mathsf{M}\colon\ \bar{B} \to B^*, \quad \mathsf{M}(\bar{b}) = \Phi_i^*(\bar{p}(\bar{b}),\ \mu(\bar{p}_i(\bar{b}))) \tag{4}$$

darstellen läßt, woraus auch sofort ihre Analytizität folgt. Wir nennen den auf die angegebene Weise aus $\{\bar{B}\}$ gewonnenen Q-Faserraum $\{B^*\}$ von $\{B\}$ den *Faserraum der Fixpunktgruppen von* $\{\bar{B}\}$. Natürlich ist umgekehrt durch $\{B^*\}$ der Faserraum $\{\bar{B}\}$ i. a. nicht eindeutig bestimmt. Vermöge der Abbildung M oder μ ist jedem Querschnitt $\bar{f}$ in $\{\bar{B}\}$ durch

$$f^* = \mathsf{M}\bar{f} \quad \text{oder} \quad f_i^*(x) = \mu(\bar{f}_i(x)) \tag{5}$$

eindeutig ein Querschnitt f^* in $\{B^*\}$, also ein Gruppenfeld der Natur Q in $\{B\}$ zugeordnet. Wählt man ein $\bar{y} \in \bar{Y}$ aus und ordnet $\bar{f}$ durch die zu $\bar{y}$ gehörige Reduktionsabbildung den auf die Fixpunktgruppe von $\bar{y}$ reduzierten Faserraum $\{\bar{B}\}_{\text{red}}$ von $\{\bar{B}\}$ zu, so ist f^* wegen (5) das natürliche Gruppenfeld in $\{B\}_{\text{red}}$.

Mancher Q-Faserraum $\{B^*\}$ eines Faserraumes $\{B\}$ läßt sich auf dem Wege über den Faserraum $\{\bar{B}\}$ besonders klar definieren. Wir zeigen dies an dem für uns wichtigsten Beispiel. Sei X eine analytische Mannigfaltigkeit, $\{T(X)\}$ ihr Tangentialfaserraum mit der Gruppe L_n. Bekanntlich zerfällt die Gesamtheit der symmetrischen Matrizen $\gamma \in L_n$ in $n+1$ Klassen P_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$, wobei P_k aus allen γ mit der Signatur k (= Anzahl

der negativen Eigenwerte) besteht. Jedes P_k ist eine $\binom{n+1}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von L_n, auf der L_n durch

$$\alpha_k\colon\ L_n \times P_k \to P_k, \quad \alpha_k(\sigma, \gamma) = {}^t\sigma^{-1}\gamma\sigma^{-1}, \tag{6}$$

(${}^t\sigma$ = Transponierte von σ) transitiv und analytisch operiert (Trägheitsgesetz der quadratischen Formen). Es sei eine solche Klasse P_k gegeben. Dann existiert ein durch (6) eindeutig bestimmter, zu $\{T(X)\}$ schwach assoziierter Faserraum $\{\bar{B}\}$ mit der zu (6) gehörigen effektiven Transformationsgruppe $(\bar{L}_n, P_k, \bar{\alpha}_k)$. Es sei nämlich P_x, $x \in X$, die Gesamtheit der quadratischen Formen mit der Signatur k über dem Tangentialvektorraum $\mathfrak{X}_x$. Wir definieren Bündel und Projektion von $\{\bar{B}\}$ durch

$$\bar{B} = \bigcup_{x \in X} P_x, \quad \bar{p}(\bar{b}) = x \ \text{ für } \ \bar{b} \in P_x.$$

Sei weiter ein Koordinatenraum $(T(X))$ gegeben. Jeder Koordinatenfunktion Φ_i von $(T(X))$ ordnen wir die 1-1 Abbildung

$$\bar{\Phi}_i\colon\ V_i \times P_k \to \bar{p}^{-1}(V_i), \quad \bar{\Phi}_i(x, \gamma) = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\,\omega^{\mu}_{i,x}\,\omega^{\nu}_{i,x} \tag{7}$$

zu, wobei γ die Matrix $(g_{\mu\nu})$ sei. Dann ist $\bar{\Phi}_{i,x}$ eine 1-1 Abbildung von P_k auf P_x, und es gilt offenbar

$$\bar{\Phi}^{-1}_{j,x}\bar{\Phi}_{i,x}(\gamma) = {}^t\sigma^{-1}_{ji}(x)\,\gamma\sigma^{-1}_{ji}(x) \tag{8}$$

mit den Koordinatentransformationen σ_{ji} von $(T(X))$. Daher bilden $\bar{B}$, $\bar{p}$, X_k, $\bar{L}_n$, $\bar{\alpha}_k$, V_i, $\bar{\Phi}_i$ einen analytischen Koordinatenraum (B). Sind $(T(X))$ und $(T(X))'$ gegeben, so haben wir

$$\bar{\Phi}'^{-1}_{k,x}\bar{\Phi}_{j,x}(\gamma) = {}^t\bar{\sigma}^{-1}_{kj}(x)\,\gamma\bar{\sigma}^{-1}_{kj}(x) \tag{8'}$$

mit den Äquivalenztransformationen $\bar{\sigma}_{kj}$ von $(T(X))$ und $(T(X))'$. Damit ist der Faserraum $\{\bar{B}\}$ zugleich mit einer natürlichen Bindung ζ an $\{T(X)\}$ gewonnen. Es handelt sich um den Faserraum der nicht-singulären quadratischen Formen der Signatur k über X. Jeder Querschnitt in $\{\bar{B}\}$ ist eine analytische nichtsinguläre quadratische Differentialform der Signatur k auf X, im Falle der Signatur 0 eine Riemannsche Metrik.

Zu jedem $\gamma \in P_k$ gehört als Fixpunktgruppe bezüglich (6) die orthogonale Gruppe aller $\sigma \in L_n$ mit

$${}^t\sigma^{-1}\gamma\sigma^{-1} = \gamma. \tag{9}$$

Der Reduktionssatz aus 1. 3 besagt daher, *daß bei festem $\gamma \in P_k$ die nicht-singulären quadratischen Differentialformen der Signatur k auf X ein-eindeutig den auf die orthogonale Gruppe* (9) *reduzierten Faserräumen von $\{T(X)\}$ entsprechen.* Wir werden später bemerken, welche Bedeutung dieser Satz in bezug auf Cartans Begriff der Mannigfaltigkeit mit euklidischem Zusammenhang hat.

Sei nun $\{B^*\}$ mit der Faser Q_k der Faserraum der Fixpunktgruppen von $\{\bar{B}\}$. Wir nennen $\{B^*\}$ einen *pythagoreischen Faserraum von X*, jeden Querschnitt in $\{B^*\}$ ein *Gruppenfeld pythagoreischer Natur Q_k in X.* Wir erinnern an die bekannte Tatsache, daß zwei symmetrische Matrizen $\gamma, \gamma' \in L_1$ genau dann dieselbe orthogonale Gruppe durch (9) definieren, wenn $\gamma' = a \cdot \gamma$ mit $a \in L_n$ gilt. Es folgt, daß $Q_k = Q_l$ mit $l = n - k$ gleichbedeutend ist, so daß also $\frac{n}{2} + 1$ bzw. $\frac{n+1}{2}$ verschiedene Klassen Q_k — und damit pythagoreische Faserräume über X — existieren, je nachdem ob n gerade oder ungerade

ist. Es folgt ferner mit 2. 1, (3), daß der Normalisator einer orthogonalen Gruppe (9) aus allen $\sigma \in L_n$ besteht, für die

$$(10) \qquad {}^t\sigma^{-1}\gamma\sigma^{-1} = a(\sigma)\cdot\gamma$$

mit $a(\sigma) \in L_1$ gilt. Der Reduktionssatz aus 2. 1 besagt also hier, *daß bei festem $K \in Q_k$ die Gruppenfelder pythagoreischer Natur Q_k auf X ein-eindeutig den auf die Gruppe* (10) *reduzierten Faserräumen von $\{T(X)\}$ entsprechen.* Dieser Satz hat eine Bedeutung in bezug auf den Cartanschen Begriff der Mannigfaltigkeit mit metrischem Zusammenhang, wie wir ebenfalls später sehen werden.

§ 3. Zusammenhang in Faserräumen.

Der Begriff des affinen Zusammenhanges in einer Mannigfaltigkeit, wie Weyl ihn im Anschluß an den von Levi-Civita entdeckten natürlichen Parallelismus in Riemannschen Räumen eingeführt hat (vgl. [14], S. 12), erfuhr zuerst durch Cartan eine beträchtliche Verallgemeinerung ([5], S. 383ff., [7], S. 1ff.). An diese anschließend haben Ehresmann und Weil den sehr allgemeinen Begriff des Zusammenhanges in Faserräumen geprägt ([10], S. 36), den wir jetzt für unsere Zwecke heranziehen wollen. Wir können uns dabei auf die mit der Gruppe des Faserraumes verträglichen Zusammenhänge beschränken ([10], S. 39). Ihre Behandlung kann sowohl auf invariante Weise als auch mit Hilfe einer Komponentenmethode vorgenommen werden. Im Hinblick auf unsere Anwendungen entscheiden wir uns für letzteres und knüpfen an die Chernsche Fassung [8] des in Rede stehenden Begriffes an.

3. 1. Im folgenden benützen wir die bereits in 1. 2 eingeführten Begriffe und Bezeichnungen. Sei (G, Y, τ) eine analytische Transformationsgruppe. Bekanntlich läßt sich der Tangentialvektorraum von $G \times Y$ in (g, y) als direkte Summe der Tangentialvektorräume von G in g und Y in y auffassen. In der Bezeichnungsweise von 1. 2, (6) und (7) gilt dann die Formel

$$(1) \qquad (d\tau)_{(g,y)} = (d\tau_y^*)_g + (d\tau_g)_y.$$

Ist V eine analytische Mannigfaltigkeit und sind $\varphi\colon V \to Y$, $\psi\colon V \to Y$, $\chi\colon V \to G$ drei analytische Abbildungen, für die

$$(2) \qquad \psi(v) = \tau(\chi(v), \varphi(v))$$

identisch in $v \in V$ gilt, so folgt durch Differentiation von (2) unter Benutzung von (1) die Differentiationsformel

$$(3) \qquad d\psi = (d\tau_\varphi^*)_\chi \cdot d\chi + (d\tau_\chi)_\varphi\, d\varphi,$$

in der wir das Argument $v \in V$ der kürzeren Schreibweise halber fortgelassen haben. Diese Konvention wollen wir für weiterhin auftretende analoge Formeln beibehalten.

Wir erinnern ferner an die durch das Transformationsgesetz

$$(4) \qquad A\colon G \times G \to G,\ A(g, a) = gag^{-1}$$

gegebene analytische Transformationsgruppe von G, deren zugehörige Abbildungen A_g die inneren Automorphismen von G sind. Das Differential dA_g induziert bekanntlich eine lineare Transformation $ad(g)$ von $\mathfrak{L}(G)$ auf sich, und die Zuordnung $g \to ad(g)$ ist ein analytischer Homomorphismus von G in die Automorphismengruppe von $\mathfrak{L}(G)$, die sogenannte adjungierte Darstellung von G ([9], S. 122ff.). Zwischen A_g und den Links- und Rechtstranslationen S_g, S_g^* besteht die evidente Beziehung

$$(5) \qquad S_g^* = A_{g^{-1}} S_g.$$

Seien V, W zwei analytische Mannigfaltigkeiten, $\mathfrak{L}$ ein reeller Vektorraum und θ eine $\mathfrak{L}$-wertige lineare Differentialform auf W. Zu jeder analytischen Abbildung $\Phi\colon V \to W$ gehört die zu θ duale, ebenfalls $\mathfrak{L}$-wertige und lineare Differentialform $\delta\Phi\theta(v, \mathfrak{v}) = \theta(\Phi(v), (d\Phi)_v\mathfrak{v})$ auf V (vgl. [9], S. 151, (1)). Für die zur natürlichen Differentialform ω auf G bezüglich der Abbildungen A_g, S_g, S_g^* dualen Differentialformen gelten die Formeln

$$\delta A_g \omega = ad(g)\,\omega, \tag{6}$$

$$\text{a) } \delta S_g \omega = \omega, \quad \text{b) } \delta S_g^* \omega = ad(g^{-1})\,\omega. \tag{7}$$

(6) und (7a) folgen unmittelbar aus der Definition von $ad(g)$ und ω, (7b) aus (7a) mit Hilfe von (5) und (6).

Betrachten wir schließlich die durch (2) für beliebige analytische Transformationsgruppen hergestellten Verhältnisse speziell für die 1. Parametergruppe von G. Dann haben wir $\psi(v) = \chi(v) \cdot \varphi(v)$ an Stelle von (2), und für (3) können wir schreiben

$$d(\chi\varphi) = (dS_\varphi^*)_\chi\, d\chi + (dS_\chi)_\varphi\, d\varphi.$$

Hiermit läßt sich nun die bezüglich $\chi\varphi$ zu ω duale Differentialform $\delta(\chi\varphi)\,\omega$ aus den bezüglich χ und φ zu ω dualen Differentialformen $\delta\chi\omega$ und $\delta\varphi\omega$ berechnen:

$$\begin{aligned} \omega_{\chi\varphi} d(\chi\varphi) &= \omega_{\chi\varphi}(dS_\varphi^*)_\chi\, d\chi + \omega_{\chi\varphi}(dS_\chi)_\varphi\, d\varphi \\ &= \omega_{S_\varphi^*\chi}(dS_\varphi^*)_\chi\, d\chi + \omega_{S_\chi\varphi}(dS_\chi)_\varphi\, d\varphi \\ &= ad(\varphi^{-1})\,\omega_\chi d\chi + \omega_\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt der Rechnung wurde (7) benutzt. Wir erhalten also

$$\delta(\chi\varphi)\,\omega = ad(\varphi^{-1})\,\delta\chi\omega + \delta\varphi\omega. \tag{8}$$

Sei nun $\{B\}$ ein analytischer Faserraum mit der Gruppe G. In jedem Koordinatenraum $(B) \in \{B\}$ definieren wir die zur natürlichen Differentialform ω auf G bezüglich der Koordinatentransformationen g_{ji} von (B) dualen Differentialformen $\omega_{ji} = \delta g_{ji}\omega$ in $V_i \frown V_j$. Dann gilt in $V_i \frown V_j \frown V_k$ wegen (8) und 1. 1, (12)

$$\omega_{ki} = ad(g_{ji}^{-1})\,\omega_{kj} + \omega_{ji}. \tag{9}$$

Sind zwei Koordinatenräume (B), $(B)' \in \{B\}$ mit den Äquivalenztransformationen $\bar{g}_{kj}$ gegeben und setzen wir $\bar{\omega}_{kj} = \delta\bar{g}_{kj}\omega$ in $V_j \frown V_k'$, so gelten in $V_i \frown V_j \frown V_k'$ bzw. $V_j \frown V_k' \frown V_l'$ die Formeln

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{ki} &= ad(g_{ji}^{-1})\,\bar{\omega}_{kj} + \omega_{ji}, \\ \bar{\omega}_{lj} &= ad(\bar{g}_{kj}^{-1})\,\omega_{lk}' + \bar{\omega}_{kj} \end{aligned} \tag{9'}$$

für die ω_{ji} bzw. ω_{lk}' von (B) bzw. $(B)'$, wie sofort aus (8) und 1. 1, (12′) folgt.

Es sei nun in jedem $(B) \in \{B\}$ ein System von analytischen $\mathfrak{L}(G)$-wertigen linearen Differentialformen Θ_i, definiert in jedem V_i von (B), gegeben, so daß bei festem (B) in $V_i \frown V_j$

$$\Theta_i = ad(g_{ji}^{-1})\,\Theta_j + \omega_{ji} \tag{10}$$

gilt, während nach Vorgabe zweier (B), $(B)' \in \{B\}$ in $V_j \frown V_k'$

$$\Theta_j = ad(\bar{g}_{kj}^{-1})\,\Theta_k' + \bar{\omega}_{kj} \tag{10'}$$

gelte. Wegen (9) und 1. 1, (22) bzw. (9′) und 1. 1, (12′) sind die Gleichungen (10) bzw. (10′) in $V_i \frown V_j \frown V_k$ bzw. $V_i \frown V_j \frown V_k'$ und $V_j \frown V_k' \frown V_l'$ miteinander verträglich. Dies ist die Einführung eines (analytischen) *Zusammenhanges Θ in $\{B\}$* nach dem Vorgang von Chern ([8], S. 399). Bei gegebenem $(B) \in \{B\}$ heißen die Θ_i die *Komponenten von Θ*

in (B). Ein Zusammenhang Θ in $\{B\}$ existiert nach Vorgabe seiner Komponenten in einem Koordinatenraum von $\{B\}$ und ist durch diese eindeutig bestimmt, wie aus (9) bis (10′) sofort folgt.

Unter einem *affinen Zusammenhang* in einer analytischen Mannigfaltigkeit X verstehen wir jeden Zusammenhang im Tangentialfaserraum $\{T(X)\}$ von X. Dabei hat $\{T(X)\}$ die Gruppe $G = L_n$. Man kommt bekanntlich überein, anstatt der linksinvarianten Vektorfelder auf L_n deren Werte an der Stelle ε (= Einheitsmatrix) in dem durch die Koeffizienten der Matrizen von L_n gegebenen Koordinatensystem zu nehmen ([9], S. 104ff.) Die Lie-Algebra von L_n ist dann die Lie-Algebra der Matrizen mit der multiplikativen Verknüpfung $\alpha\beta - \beta\alpha$. Die natürliche Differentialform ω berechnet sich aus 1. 2, (3) leicht zu

$$\omega(\sigma, \alpha) = \sigma^{-1}\alpha, \tag{11}$$

während die durch $\sigma \in L_n$ bei der adjungierten Darstellung von L_n bewirkte lineare Transformation von $\mathfrak{L}(L_n)$ wegen (4) durch

$$ad(\sigma)\,\alpha = \sigma\alpha\sigma^{-1} \tag{12}$$

gegeben ist. Aus (11) und (12) folgen die Transformationsgesetze (10), (10′) für die Komponenten eines affinen Zusammenhanges. Sie lauten

$$\Theta_i = \sigma_{ji}^{-1}\,\Theta_j\sigma_{ji} + \sigma_{ji}^{-1}\,d\sigma_{ji}, \tag{13}$$

$$\Theta_j = \bar{\sigma}_{kj}^{-1}\,\Theta'_k\bar{\sigma}_{kj} + \bar{\sigma}_{kj}^{-1}\,d\bar{\sigma}_{kj}. \tag{13′}$$

In holonomen Koordinatenräumen erhält man mit $\Theta_i = (\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\mu,i}\,dx_i^{\varkappa})$

$$\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu,i} = \frac{\partial x_i^{\lambda}}{\partial x_j^{\varkappa}} \cdot \frac{\partial x_i^{\alpha}}{\partial x_i^{\nu}} \cdot \frac{\partial x_j^{\beta}}{\partial x_i^{\mu}}\,\Gamma^{\varkappa}_{\alpha\beta,j} + \frac{\partial x_i^{\lambda}}{\partial x_j^{\varkappa}} \cdot \frac{\partial^2 x_j^{\varkappa}}{\partial x_i^{\nu}\,\partial x_i^{\mu}}, \tag{14}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu,j} = \frac{\partial x_j^{\lambda}}{\partial x_k^{\varkappa}} \cdot \frac{\partial x_k'^{\alpha}}{\partial x_j^{\nu}} \cdot \frac{\partial x_k'^{\beta}}{\partial x_j^{\mu}}\,\Gamma'^{\varkappa}_{\alpha\beta,k} + \frac{\partial x_j^{\lambda}}{\partial x_k'^{\varkappa}} \cdot \frac{\partial^2 x_k'^{\varkappa}}{\partial x_j^{\nu}\,\partial x_j^{\mu}}. \tag{14′}$$

Ein affiner Zusammenhang in X heißt *symmetrisch*, wenn in einem holonomen Koordinatenraum von $\{T(X)\}$ für die Komponenten $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,i}$ die Symmetrie $\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu,i} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,i}$ identisch gilt, eine wegen (14), (14′) invariante Eigenschaft des affinen Zusammenhanges. Eine für alle Koordinatenräume gültige Kennzeichnung der symmetrischen affinen Zusammenhänge erhält man nach Cartan folgendermaßen: Die Querprojektionen in $\{T(X)\}$ definieren eine 1-fach kontravariante tensorielle lineare Differentialform mit Werten in R^n, deren Komponenten ω_i^{μ} in einem Koordinatenraum von $\{T(X)\}$ wir bereits in 1. 1 eingeführt haben. Seien nun $\omega^{\lambda}_{\mu,i}$ die Komponenten eines affinen Zusammenhanges in einem Koordinatenraum von $\{T(X)\}$. Bildet man nach Cartan die äußeren Differentiale $d\omega_i^{\mu}$ sowie die äußeren Produkte $\omega_i^{\mu} \wedge \omega^{\lambda}_{\mu,i}$, so ist

$$\Omega_i^{\mu} = d\omega_i^{\mu} - \omega_i^{\nu} \wedge \omega^{\mu}_{\nu,i} \tag{15}$$

eine 1-fach kontravariante tensorielle quadratische Differentialform mit Werten in R^n, deren Verschwinden charakteristisch für die Symmetrie des affinen Zusammenhanges ist:

$$d\omega_i^{\mu} = \omega_i^{\nu} \wedge \omega^{\mu}_{\nu,i}. \tag{16}$$

Der Begriff des Zusammenhanges in einem Faserraum steht in enger Beziehung zu dem der $\mathfrak{L}(G)$-wertigen linearen Differentialform α vom *adjungierten Typ* in einem Faserraum. Die Definition derselben ist ihrem Wortlaut nach völlig analog zu der des

Zusammenhanges, die definierenden Transformationsgesetze für die Komponenten α_i von α lauten

$$\alpha_i = ad(g_{ji}^{-1})\,\alpha_j, \tag{17}$$

$$\alpha_j = ad(\bar{g}_{kj}^{-1})\,\alpha'_k. \tag{17'}$$

Es gilt der evidente

Satz 1. *Sei $\{B\}$ ein analytischer Faserraum. Man erhält alle Zusammenhänge in $\{B\}$ aus einem von ihnen, Θ, indem man zu Θ eine beliebige $\mathfrak{L}(G)$-wertige lineare Differentialform vom adjungierten Typ addiert.*

Im Tangentialfaserraum der analytischen Mannigfaltigkeit X lauten die Transformationsgesetze (17), (17′) mit $\alpha_i = (a^{\mu}_{\nu\lambda,i}\,\omega^{\nu}_i)$ wegen (12)

$$a^{\mu}_{\nu\lambda,i} = \overset{-1}{s}{}^{\mu}_{\varkappa,ji}\, s^{\beta}_{\nu,ji}\, s^{\gamma}_{\lambda,ji}\, a^{\varkappa}_{\beta\gamma,j}, \tag{18}$$

$$a^{\mu}_{\nu\lambda,j} = \overset{-1}{\bar{s}}{}^{\mu}_{\varkappa,kj}\, \bar{s}^{\beta}_{\nu,kj}\, \bar{s}^{\gamma}_{\lambda,kj}\, a'^{\varkappa}_{\beta\gamma,k}. \tag{18'}$$

Die linearen Differentialformen α vom adjungierten Typ im Tangentialfaserraum lassen sich also durch die 1-fach kontravarianten, 2-fach kovarianten Tensorfelder charakterisieren. Wir nennen α *symmetrisch*, wenn $a^{\mu}_{\nu\lambda,i} = a^{\mu}_{\lambda\nu,i}$ identisch gilt, eine wegen (18), (18′) invariante Definition. Dann haben wir neben Satz 1 auch den entsprechenden

Satz 2. *Sei X eine analytische Mannigfaltigkeit. Man erhält alle symmetrischen affinen Zusammenhänge in X aus einem von ihnen, Θ, indem man zu Θ eine beliebige symmetrische lineare Differentialform α vom adjungierten Typ addiert.*

3. 2. In einem mit einem Zusammenhang versehenen analytischen Faserraum ist es möglich, den Begriff des kovarianten Differentials zu definieren. Für die hier betrachteten Zusammenhänge stimmt dieser Begriff mit dem Ehresmannschen Begriff des kovarianten Differentials überein ([10], S. 45ff.).

Sei (G, Y, τ) eine analytische Transformationsgruppe und ω die natürliche Differentialform auf G. Wir betrachten in Verallgemeinerung von 1. 2, (8) die Mannigfaltigkeit der linearen Abbildungen

$$(d\tau^*_y)_g\,\omega_g^{-1}\colon \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{Y}_{\tau^*_y(g)}, \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{Y}_y$ den Tangentialvektorraum von Y in y bezeichne. Für diese Abbildungen wollen wir die Transformationsformel

$$(d\tau^*_y)_{ga}\,\omega_{ga}^{-1} = (d\tau_g)_{\tau^*_y(a)} \cdot (d\tau^*_y)_a\,\omega_a^{-1} \tag{2}$$

beweisen. Zunächst bestehen zwischen den Abbildungen τ_g, τ^*_y, S_g, S^*_a offenbar die Beziehungen

$$\text{a)}\ \tau^*_{\tau(g,y)} = \tau^*_y S^*_g, \quad \text{b)}\ \tau^*_y S_g = \tau_g \tau^*_y, \tag{3}$$

deren Differentiation die Formeln

$$\text{a)}\ d\tau^*_{\tau(g,y)} = d\tau^*_y\, dS^*_g, \quad \text{b)}\ d\tau^*_y\, dS_g = d\tau_g\, d\tau^*_y \tag{4}$$

liefert. Weiter bemerken wir, daß sich die Formeln 3. 1, (7) auch in der Form

$$\text{a)}\ (dS_g)_a\,\omega_a^{-1} = \omega_{ga}^{-1}, \quad \text{b)}\ (dS^*_a)_g\,\omega_g^{-1} = \omega_{ga}^{-1}\, ad(a^{-1}) \tag{5}$$

schreiben lassen. (5a) und (4b) ergeben sofort (2).

Sei nun $\{B\}$ ein analytischer Faserraum. Die Querprojektionen in $\{B\}$ erfüllen wegen 1. 1, (11) bzw. (11′) die durch 3. 1, (2) gegebenen Verhältnisse, so daß sie wegen 3. 1, (3) die Transformationsgesetze

$$dp_j = (d\tau_{g_{ji}p})_{p_i} dp_i + (d\tau^*_{p_i})_{g_{ji}p} d(g_{ji}p), \tag{6}$$

$$dp'_k = (d\tau_{\bar{g}_{kj}p})_{p_j} dp_j + (d\tau^*_{p_j})_{\bar{g}_{kj}p} d(\bar{g}_{kj}p) \tag{6'}$$

haben. Sei Θ ein Zusammenhang in $\{B\}$. Mit Hilfe der in 1. 2 durch (8) eingeführten Mannigfaltigkeit von linearen Abbildungen können wir jetzt in jedem Koordinatenraum $(B) \in \{B\}$ die analytischen Abbildungen

$$\zeta_i\colon\ T(p^{-1}(V_i)) \to T(Y), \quad \zeta_i = (d\tau^*_{p_i})_e \omega_e^{-1} \delta p \Theta_i \tag{7}$$

definieren, welche bei gegebenem $b \in p^{-1}(V_i)$ den dortigen Tangentialvektorraum $\mathfrak{B}_b$ linear in den Tangentialvektorraum $\mathfrak{Y}_{p_i(b)}$ von Y in $p_i(b)$ abbilden, eine Eigenschaft, die sie mit den dp_i gemeinsam haben. Wir behaupten für sie die Transformationsgesetze

$$\zeta_j = (d\tau_{g_{ji}p})_{p_i} \zeta_i - (d\tau^*_{p_i})_{g_{ji}p} d(g_{ji}p), \tag{8}$$

$$\zeta'_k = (d\tau_{\bar{g}_{kj}p})_{p_j} \zeta_j - (d\tau^*_{p_j})_{\bar{g}_{kj}p} d(\bar{g}_{kj}p). \tag{8'}$$

Wir können uns auf den Beweis von (8) beschränken. Wegen (4a) und 1. 1, (11) gilt

$$(d\tau^*_{p_j})_e \omega_e^{-1} = (d\tau^*_{p_i})_{g_{ji}p} dS^*_{g_{ji}p} \omega_e^{-1}$$

und weiter wegen (5b) für $g = e$

$$(d\tau^*_{p_j})_e \omega_e^{-1} = (d\tau^*_{p_i})_{g_{ji}p} \omega^{-1}_{g_{ji}p} ad\big((g_{ji}p)^{-1}\big).$$

Andererseits folgt aus 3. 1, (10) sofort

$$\delta p \Theta_j = ad(g_{ji}p)\, \delta p \Theta_j - ad(g_{ji}p)\, \delta p \omega_{ji},$$

also

$$\zeta_j = (d\tau^*_{p_i})_{g_{ji}p} \omega^{-1}_{g_{ji}p} \delta p \Theta_i - (d\tau^*_{p_i})_{g_{ji}p} \omega^{-1}_{g_{ji}p} \delta p \omega_{ji}.$$

Wendet man auf den ersten Summanden (2) für $a = e$ an und beachtet beim zweiten die Definition der ω_{ji}, so ergibt sich (8).

Wegen der obigen Bemerkung über die ζ_i lassen sich diese zu den dp_i addieren, und der Vergleich der Transformationsgesetze (6) und (8) ergibt, daß die entstehenden Abbildungen

$$Dp_i\colon\ T(p^{-1}(V_i)) \to T(Y), \quad Dp_i = dp_i + \zeta_i \tag{9}$$

die Transformationsgesetze

$$Dp_j = (d\tau_{g_{ji}p})_{p_i} \cdot Dp_i, \tag{10}$$

$$Dp'_k = (d\tau_{\bar{g}_{kj}p})_{p_j} \cdot Dp_j \tag{10'}$$

haben.

Sei nun W eine analytische Mannigfaltigkeit und $f\colon W \to B$ eine analytische Abbildung. Ähnlich wie ein Querschnitt hat f in jedem Koordinatenraum $(B) \in \{B\}$ seine *Komponenten*

$$f_i\colon f^{-1}p^{-1}(V_i) \to Y, \quad f_i(w) = p_i(f(w)), \tag{11}$$

welche wegen 1. 1, (11) bzw. (11′) die Transformationsgesetze

$$f_j(w) = g_{ji}(pf(w)) \cdot f_i(w), \tag{12}$$

$$f'_k(w) = \bar{g}_{kj}(pf(w)) \cdot f_j(w) \tag{12'}$$

haben. Die Abbildung $pf\colon W \to X$ heißt die *Projektion von f*. Mit Hilfe der Dp_i definieren wir nun das *kovariante Differential von f* (bezüglich Θ) durch seine *Komponenten*

$$Df_i\colon\ T(f^{-1}p^{-1}(V_i)) \to T(Y),\ Df_i = Dp_i \cdot df \tag{13}$$

in einem $(B) \in \{B\}$. Diese haben offenbar wieder die Eigenschaft, daß sie bei fest gegebenem $w \in W$ den Tangentialvektorraum $\mathfrak{W}_w$ in den Tangentialvektorraum $\mathfrak{Y}_{f_i(w)}$ linear abbilden. Wegen (10), (10′) haben die Df_i die Transformationsgesetze

$$Df_j = (d\tau_{g_{ji}pf})_{f_i} \cdot Df_i, \tag{14}$$

$$Df_k' = (d\tau_{g_{kj}pf})_{f_j} \cdot Df_j. \tag{14'}$$

Mit Hilfe von (7) und (9) berechnen sich die Df_i zu

$$Df_i = df_i + (d\tau_{f_i}^*)_e\, \omega_e^{-1}\, \delta(pf)\, \Theta_i. \tag{15}$$

Man hätte das kovariante Differential auch durch (15) definieren können; dann wären die Transformationsgesetze (14), (14′) aus (12), (12′) zu folgen. Diese Transformationsgesetze sind für uns entscheidend, weil sie zeigen, daß das Verschwinden des kovarianten Differentials, definiert durch $Df_i = 0$, eine invariante Eigenschaft ist. Wir erkennen schließlich ohne weiteres, daß die Dp_i die Komponenten des kovarianten Differentials der identischen Abbildung $f\colon B \to B$ sind und daß die Formel (15) für den Fall eines Querschnittes $f\colon X \to B$ in die Formel

$$Df_i = df_i + (d\tau_{f_i}^*)_e\, \omega_e^{-1} \Theta_i \tag{16}$$

übergeht.

3. 3. Wir zeigen in diesem Abschnitt, auf welche Weise ein Zusammenhang in einem Faserraum eine Übertragung in dem Faserraum definiert. Einige Vorbereitungen, die wir auch für andere Zwecke noch brauchen, werden vorausgeschickt.

Es sei $\{B\}$ ein analytischer Faserraum, $\{B^*\}$ ein zu $\{B\}$ schwach assoziierter Faserraum bezüglich eines analytischen Homomorphismus ν der Gruppe G von $\{B\}$ auf die Gruppe G^* von $\{B^*\}$ und η eine Bindung von $\{B^*\}$ an $\{B\}$. Das Differential $d\nu$ von ν induziert bekanntlich einen Homomorphismus von $\mathfrak{L}(G)$ auf $\mathfrak{L}(G^*)$, den wir weiterhin ebenfalls mit $d\nu$ bezeichnen wollen ([9], S. 111 ff.). Dann gelten die beiden leicht zu beweisenden Formeln

$$ad(\nu(g))\, d\nu = d\nu ad(g), \tag{1}$$

$$\delta\nu\omega^* = d\nu\omega, \tag{2}$$

(1) identisch in $g \in G$, (2) für die natürlichen Differentialformen ω und ω^* auf G und G^*. Auf Grund dieser Formeln ist es möglich, jedem Zusammenhang Θ in $\{B\}$ eindeutig einen Zusammenhang Θ^* in $\{B^*\}$ zuzuordnen: Wir wählen ein $(B) \in \{B\}$, in dem ein gegebener Zusammenhang Θ die Komponenten Θ_i haben möge, und definieren Θ^* durch seine Komponenten in $(B^*) = \eta(B)$ in der Form

$$\Theta_i^* = d\nu\Theta_i. \tag{3}$$

Mit (1) und (2) folgt, daß die Θ_i^* die Komponenten eines Zusammenhanges in $\{B^*\}$ bezüglich (B^*) sind. In $V_i \frown V_j$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} ad(g_{ji}^{*-1})\, \Theta_j^* + \omega_{ji}^* &= ad((\nu g_{ji})^{-1})\, d\nu\Theta_j + \delta(\nu g_{ji})\, \omega^* \\ &= ad(\nu(g_{ji}^{-1}))\, d\nu\Theta_j + \delta g_{ji}\, \delta\nu\omega^* \\ &= d\nu ad(g_{ji}^{-1})\, \Theta_j + \delta g_{ji}\, d\nu\omega \\ &= d\nu(ad(g_{ji}^{-1})\, \Theta_j + \omega^{ji}) = d\nu\Theta_i. \end{aligned}$$

Ganz entsprechend folgt, daß die Definition von Θ^* nicht von dem ausgewählten (B) abhängt. Wir nennen Θ^* *den zu Θ schwach assoziierten Zusammenhang in* $\{B^*\}$. Man beachte, daß erst die Vorgabe der Bindung η von $\{B^*\}$ an $\{B\}$ die eindeutige Zuordnung (3) ermöglicht.

Wir erinnern daran, daß ein Faserraum $\{B\}$ *Hauptfaserraum* genannt wird, wenn seine Gruppe G zugleich Faser ist und G durch Linkstranslationen auf sich operiert ([11], S. 35). In einem Hauptfaserraum $\{B\}$ mit der Gruppe G ist jedem $g \in G$ durch

$$\beta_g\colon B \to B, \quad \beta_g(b) = \Phi_i\big(p(b),\ p_i(b) \cdot g\big) \tag{4}$$

eindeutig ein analytischer Isomorphismus von B auf sich zugeordnet, welcher die Fasern G_x von B analytisch isomorph auf sich abbildet. Zu $b, b' \in G_x$ gibt es genau ein $g \in G$ mit $b' = \beta_g(b)$. Denn wegen (4) gilt offenbar

$$p_i\big(\beta_g(b)\big) = p_i(b) \cdot g. \tag{5}$$

Wegen (5) heißt β_g die durch g bewirkte *Rechtstranslation* von B (vgl. [11], S. 39ff.).

Wir erinnern ferner an die bekannte Tatsache, daß jedem analytischen Faserraum $\{B\}$ eindeutig sein *assoziierter Hauptfaserraum* $\{\widetilde{B}\}$ zugeordnet ist. $\{\widetilde{B}\}$ ist ein zu $\{B\}$ bezüglich des identischen Automorphismus von G auf sich assoziierter Hauptfaserraum, dessen Konstruktion wir kurz andeuten: $\{\widetilde{B}\}$ hat den Basisraum X von $\{B\}$. Sein Bündel ist durch $\widetilde{B} = \bigcup_{x \in X} \widetilde{G}_x$ definiert, wobei G_x die Gesamtheit der *zulässigen* Abbildungen $\xi\colon Y \to Y_x$ bildet, d. h. derjenigen analytischen Isomorphismen $\xi\colon Y \to Y_x$, für die $\Phi_{i,x}^{-1}\xi$ in G liegt. $\tilde{p}\colon \widetilde{B} \to X$ wird durch $\tilde{p}(\tilde{b}) = x$ für $\tilde{b} \in \widetilde{G}_x$ definiert. Ist nun ein $(B) \in \{B\}$ gegeben, so definieren die Koordinatenumgebungen V_i von (B) und die Abbildungen

$$\widetilde{\Phi}_i\colon V_i \times G \to \tilde{p}^{-1}(V_i), \quad \widetilde{\Phi}_i(x, g) = \Phi_{i,x} g \tag{6}$$

einen Koordinatenraum $(\widetilde{B})$ mit dem Bündel $\widetilde{B}$, Basisraum X, der Projektion $\tilde{p}$, der 1. Parametergruppe von G als Transformationsgruppe und den Koordinatentransformationen g_{ji} von (B). Äquivalente (B) führen zu äquivalenten $(\widetilde{B})$, so daß wir zugleich mit $\{\widetilde{B}\}$ eine natürliche Bindung von $\{\widetilde{B}\}$ an $\{B\}$ haben (vgl. [11], S. 35ff.). Ist Θ ein Zusammenhang in $\{B\}$, so stimmt wegen (3) der zu Θ schwach assoziierte Zusammenhang $\widetilde{\Theta}$ in $\{\widetilde{B}\}$ mit Θ überein.

Sei $\{B\}$ ein Hauptfaserraum und Θ ein Zusammenhang in $\{B\}$. Das in 3. 2 definierte kovariante Differential einer analytischen Abbildung $f\colon W \to B$ kann in $\{B\}$ durch eine invariante $\mathfrak{L}(G)$-wertige lineare Differentialform ersetzt und dadurch vereinfacht werden. Wir bilden nämlich mit Hilfe der natürlichen Differentialform ω auf G

$$\Delta f_i = \omega(f_i, Df_i). \tag{7}$$

Dann gilt wegen 3. 1, (7a)

$$\Delta f_j = \Delta f_i, \tag{8}$$

$$\Delta f'_k = \Delta f_j, \tag{8'}$$

d. h. durch (7) ist eine invariante $\mathfrak{L}(G)$-wertige lineare Differentialform auf W gegeben: das kovariante Differential Δf von f. Die Berechnung von Δf erfolgt durch Einsetzen von 3. 2, (15) in (7). Mit Hilfe von 3. 2, (5) und 3. 1, (8) erhält man ohne weiteres

$$\Delta f = \delta f_i \omega + ad\,(f_i^{-1})\,\delta(pf)\,\Theta_i. \tag{9}$$

Man beachte, daß hier — wie schon früher in analogen Fällen — f_i^{-1} die Abbildung $f_i\colon f^{-1}p^{-1}(V_i) \to G$ gefolgt von $g \to g^{-1}$ in G bezeichnet. Mit 3. 1, (8) folgt, daß $\Delta f = 0$ mit

$$\delta f_i^{-1}\,\omega = \delta(pf)\,\Theta_i \tag{10}$$

gleichbedeutend ist.

Wir betrachten schließlich Kurven im Basisraum X und Bündel B eines analytischen Faserraumes $\{B\}$, gegeben durch analytische Abbildungen $C'\colon I \to X$ bzw. $C\colon I \to B$, wobei I das reelle abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ sei. Zufolge 3. 2 können wir eine Kurve C in B kovariant differenzieren, sobald ein Zusammenhang Θ in $\{B\}$ gegeben ist. C heiße eine *Integralkurve von* Θ, wenn das kovariante Differential von C (bezüglich Θ) verschwindet

$$dC_i = -(d\tau^*_{C_i})_e\,\omega_e^{-1}\,\delta(pC)\,\Theta_i. \tag{11}$$

Bei gegebener Projektion pC läßt sich (11) nach Einführung eines Koordinatensystems für Y lokal als ein System von totalen Differentialgleichungen in der Veränderlichen t für die gesuchte Integralkurve C auffassen, und wegen der Kompaktheit von I genügt die Integration endlich vieler solcher Systeme zur Bestimmung von ganz C. Daraus folgt, daß es zu gegebener Kurve C' in X und gegebenem $b \in Y_{C'(0)}$ höchstens eine Integralkurve C in B mit $pC = C'$ und $C(0) = b$ geben kann. Ferner ist klar, daß es zu gegebenem $x_0 \in X$, gegebener Richtung in x_0 und gegebenem $b_0 \in Y_{x_0}$ eine Kurve C' in X und eine Integralkurve C in B gibt, so daß C bzw. C' in x_0 bzw. b_0 beginnen, C' die gegebene Richtung hat und die Projektion von C ist. Liegt ein Hauptfaserraum vor, so kann man wegen (9) und (10) statt (11)

$$\delta C_i^{-1}\,\omega = \delta(pC)\,\Theta_i \tag{12}$$

schreiben und wieder dieselben Bemerkungen über (12) machen wie soeben für (11). Dann folgt ohne weiteres, daß alle Integralkurven von Θ in B mit gegebener Projektion in X aus einer solchen, C, hervorgehen, indem man auf C alle Rechtstranslationen von G auf B anwendet.

Sei nun $\{B\}$ ein analytischer Faserraum mit dem Zusammenhang Θ und $\{\tilde{B}\}$ der assoziierte Hauptfaserraum von $\{B\}$. Dann ist Θ auch ein Zusammenhang in $\{\tilde{B}\}$. Sei ferner C' eine Kurve in X, zu der eine Integralkurve C in $\tilde{B}$ mit der Projektion $C' = \tilde{p}C$ existiert. $C_t = C(t)$ ist für jedes $t \in I$ eine zulässige Abbildung von Y auf $Y_{C'(t)}$. Daher ist

$$C_t C_0^{-1}\colon\ Y_{C'(0)} \to Y_{C'(t)} \tag{13}$$

für jedes $t \in I$ ein analytischer Isomorphismus, so daß für jedes zulässige $\xi\colon Y \to Y_{C'(0)}$ die Abbildung $C_t C_0^{-1}\xi\colon Y \to Y_{C'(t)}$ ebenfalls zulässig ist. Ein analytischer Isomorphismus $\eta\colon Y_x \to Y_{x'}$ mit dieser Eigenschaft heiße ebenfalls *zulässig*. Offenbar hängt (13) nur von der Kurve C' im Basisraum ab: Ist nämlich $\bar{C}$ eine weitere Integralkurve von Θ in $\{\tilde{B}\}$ mit $\tilde{p}\bar{C} = C'$, so gilt — wie gezeigt wurde — $\bar{C} = \beta_g C$ mit festem $g \in G$, also hier $\bar{C}_t = C_t g$, woraus sofort auf $\bar{C}_t \bar{C}_0^{-1} = C_t C_0^{-1}$ geschlossen werden kann. Wir nennen (13) die (durch Θ bestimmte) *Übertragung längs* C'.

Wir erwähnen abschließend, daß für den Fall eines affinen Zusammenhanges die Begriffe des kovarianten Differentials und der Übertragung mit den für Tensorfelder und Tensoren gebildeten klassischen Begriffen übereinstimmen, wie man aus 3. 2, (16) und 3. 3, (11) leicht errechnet.

§ 4. Gruppenmetrik in Faserräumen.

Wir kommen in diesem Paragraphen zu demjenigen Begriff von Metrik in einem Faserraum, den wir als Verallgemeinerung von Cartans Begriff der Mannigfaltigkeit mit

metrischem Zusammenhang der Behandlung des Weylschen Raumproblems zugrunde legen wollen. Es wird sich bei diesem Begriff um ein Paar handeln, bestehend aus einem Gruppenfeld in einem Faserraum und einem mit diesem Gruppenfeld im gewissen Sinne verträglichen Zusammenhang in demselben Faserraum. Ehe wir die Definition angeben, wollen wir ganz allgemein die Beziehungen untersuchen, welche zwischen den Zusammenhängen in einem Faserraum und den Querschnitten in einem schwach assoziierten Faserraum bestehen.

4. 1. Es sei weiterhin $\{B\}$ ein analytischer Faserraum, $\{B^*\}$ ein zu $\{B\}$ schwach assoziierter Faserraum bezüglich eines analytischen Homomorphismus ν der Gruppe G von $\{B\}$ auf die Gruppe G^* von $\{B^*\}$ und η eine Bindung von $\{B^*\}$ an $\{B\}$. Wir bezeichnen mit $\varkappa$ bzw. λ die Transformationsgesetze, welche die Operationen von G bzw. G^* auf der Faser Y^* von $\{B^*\}$ definieren. Dann gilt zunächst der

Hilfssatz 1. *Sei Θ ein Zusammenhang in $\{B\}$, Θ^* der schwach assoziierte Zusammenhang in $\{B^*\}$. Für das mit Θ^* gebildete kovariante Differential eines Querschnittes f^* in $\{B^*\}$ gilt in jedem Koordinatenraum $(B) \in \{B\}$ die Darstellung*

$$D^* f_i^* = df_i^* + (d\varkappa_{f_i^*}^*)_e\, \omega_e^{-1} \Theta_i. \tag{1}$$

Zwischen $\varkappa$ und λ besteht nämlich nach 1. 3, (1) die Beziehung $\lambda(\nu(g), y^*) = \varkappa(g, y^*)$, also $\lambda_{y^*}^* \nu = \varkappa_{y^*}^*$, also auch $d\lambda_{y^*}^* d\nu = d\varkappa_{y^*}^*$ bei festem $y^* \in Y^*$. Andererseits läßt sich die Formel 3. 3, (2) auch in der Gestalt $\omega_{\nu(g)}^{*-1} d\nu = d\nu \omega_g^{-1}$ schreiben. Daraus folgt

$$(d\lambda_{y^*}^*)_{\nu(e)}\, \omega_{\nu(e)}^{-1} d\nu = (d\lambda_{y^*}^*)_{\nu(e)}\, d\nu \omega_e^{-1} = (d\varkappa_{y^*}^*)_e\, \omega_e^{-1},$$

und daraus mit 3. 3, (3) sofort (1).

Sei jetzt f^* ein Querschnitt in $\{B^*\}$ und α eine $\mathfrak{L}(G)$-wertige lineare Differentialform vom adjungierten Typ in $\{B\}$. Wir nennen α *mit f^* verträglich*, wenn in einem $(B) \in \{B\}$, in dem α die Komponenten α_i haben möge,

$$\alpha_i(x, \mathfrak{x}) \in \mathfrak{L}(H_i(x)), \quad x \in V_i,\ \mathfrak{x} \in \mathfrak{X}_x, \tag{2}$$

identisch gilt, wobei $H_i(x)$ die Fixpunktgruppe von $f_i^*(x)$ in G sei. (2) hat einen Sinn, weil für eine Liesche Untergruppe K von G

$$ad\,(g)\, \mathfrak{L}(K) = \mathfrak{L}(g K g^{-1}), \quad g \in G, \tag{3}$$

identisch gilt. Wir haben

$$\alpha_j(x, \mathfrak{x}) = ad\big(g_{ji}(x)\big)\, \alpha_i(x, \mathfrak{x}) \in ad\,\big(g_{ji}(x)\big)\, \mathfrak{L}\big(H_i(x)\big),$$

und daher wegen (3)

$$\alpha_j(x, \mathfrak{x}) \in \mathfrak{L}\big(g_{ji}(x)\, H_i(x)\, g_{ji}^{-1}(x)\big) = \mathfrak{L}\big(H_j(x)\big).$$

Aus demselben Grunde gilt (2) in jedem Koordinatenraum von $\{B\}$.

Mit Hilfe dieses Verträglichkeitsbegriffes ist es möglich, in bezug auf einen Querschnitt f^* in $\{B^*\}$ alle Zusammenhänge in $\{B\}$ zu klassifizieren. Wir nennen die Zusammenhänge Θ, Θ' in $\{B\}$ *äquivalent bezüglich f^**, wenn $\alpha = \Theta' - \Theta$ mit f^* verträglich ist. Die Gleichheitspostulate folgen unmittelbar.

Unter den so von f^* induzierten Klassen von Zusammenhängen in $\{B\}$ ist überdies eine durch f^* ausgezeichnet. Nennen wir nämlich einen Zusammenhang Θ in $\{B\}$ *mit f^* verträglich*, wenn das mit dem zu Θ schwach assoziierten Zusammenhang Θ^* gebildete kovariante Differential von f^* verschwindet, so haben wir den

Satz 1. *Die mit f^* verträglichen Zusammenhänge Θ bilden eine Klasse bezüglich f^* äquivalenter Zusammenhänge in $\{B\}$, d. h. man erhält sie alle aus einem von ihnen, Θ, indem man zu θ eine beliebige mit f^* verträgliche $\mathfrak{L}(G)$-wertige lineare Differentialform α vom adjungierten Typ in $\{B\}$ addiert.*

Seien zunächst Θ und α mit f^* verträglich und $(\Theta + \alpha)^*$ der zu $\Theta + \alpha$ schwach assoziierte Zusammenhang in $\{B^*\}$. Für das mit $(\Theta + \alpha)^*$ gebildete kovariante Differential von f^* gilt wegen Hilfssatz 1 in $(B) \in \{B\}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} D^* f_i^* &= df_i^* + (d\varkappa_{f_i^*})_e \, \omega_e^{-1} (\Theta_i + \alpha_i) \\ &= \left(df_i^* + (d\varkappa_{f_i^*})_e \, \omega_e^{-1} \Theta_i\right) + (d\varkappa_{f_i^*})_e \, \omega_e^{-1} \alpha_i . \end{aligned}$$

In der linken Klammer steht wegen Hilfssatz 1 das mit Θ^* gebildete kovariante Differential von f^*, das nach Voraussetzung verschwindet. Der zweite Ausdruck verschwindet aber wegen (2) und 1. 2, Satz 2. Also ist auch $\Theta + \alpha$ mit f^* verträglich. — Sind umgekehrt Θ, Θ' mit f^* verträglich und setzen wir $\alpha = \Theta' - \Theta$, so folgt durch Abziehen der mit den schwach assoziierten Zusammenhängen Θ^* und Θ'^* gebildeten kovarianten Differentiale von f^* in der Darstellung (1) in $(B) \in \{B\}$

$$(d\varkappa_{f_i^*})_e \, \omega_e^{-1} \alpha_i = 0 .$$

Wegen 1. 2, Satz 2 gilt dann (2), d. h. α ist mit f^* verträglich und Θ, Θ' sind äquivalent.

Von nun an setzen wir voraus, daß $\{B^*\}$ eine transitive Transformationsgruppe habe, so daß wegen 1. 3, (1) auch die Gruppe G von $\{B\}$ transitiv auf Y^* operiert. Dann gilt der

Satz 2. *Es seien $y^* \in Y^*$ und ein Querschnitt f^* in $\{B^*\}$ gegeben, und es sei $\{B\}_{\text{red}}$ der f^* durch die zu y^* gehörige Reduktionsabbildung zugeordnete, auf die Fixpunktgruppe H von y^* in G reduzierte Faserraum von $\{B\}$. Dann besteht eine natürliche 1-1 Abbildung zwischen allen mit f^* verträglichen Zusammenhängen in $\{B\}$ und allen Zusammenhängen in $\{B\}_{\text{red}}$.*

Sei Θ ein mit f^* verträglicher Zusammenhang in $\{B\}$. Wir wählen einen auf H reduzierbaren Koordinatenraum $(B) \in \{B\}$, für den $(B)_{\text{red}} \in \{B\}_{\text{red}}$ gilt. Nach Voraussetzung über Θ verschwindet das mit dem zu Θ schwach assoziierten Zusammenhang Θ^* gebildete kovariante Differential von f^*, so daß in (B) wegen Hilfssatz 1 und $f_i^*(x) = y^*$, also $df_i^* = 0$,

$$(d\varkappa_{y^*})_e \, \omega_e^{-1} \Theta_i = 0$$

identisch gilt. Mit 1. 2, Satz 2 folgt hieraus die $\mathfrak{L}(H)$-Wertigkeit der Θ_i in (B). Es folgt, daß Θ eindeutig einen Zusammenhang Θ_{red} in $\{B\}_{\text{red}}$ induziert, der in $(B)_{\text{red}}$ die Komponenten von Θ in (B) hat. Hiermit ist offenbar eine 1-1 Abbildung aller mit f^* verträglichen Zusammenhänge in die Menge aller Zusammenhänge in $\{B\}_{\text{red}}$ gegeben. Liegt ferner irgendein Zusammenhang Θ_{red} in $\{B\}_{\text{red}}$ vor, so bestimmt dieser offenbar eindeutig einen Zusammenhang Θ in $\{B\}$, der in $(B) \in \{B\}$ mit $(B)_{\text{red}} \in \{B\}_{\text{red}}$ die Komponenten von Θ_{red} in $(B)_{\text{red}}$ hat, also $\mathfrak{L}(H)$-wertig ist. Mit 1. 2, Satz 2 und $f_i^*(x) = y^*$ folgt hieraus, daß Θ mit f^* verträglich ist. Daher erschöpft die angegebene 1-1 Abbildung die Menge aller Zusammenhänge in $\{B\}_{\text{red}}$. Der auf Grund der hergestellten Abbildung dem Zusammenhang Θ in $\{B\}$ zugeordnete Zusammenhang Θ_{red} in $\{B\}_{\text{red}}$ heiße der (auf $\mathfrak{L}(H)$) *reduzierte Zusammenhang von Θ in $\{B\}_{\text{red}}$.*

Wir betrachten schließlich Paare (f^*, Θ), bestehend aus einem Querschnitt f^* in $\{B^*\}$ und einem mit f^* verträglichen Zusammenhang Θ in $\{B\}$. Die Kombination des Reduktionssatzes aus 1. 3 mit Satz 2 liefert dann ohne weiteres den

Satz 3. *Es sei $y^* \in Y^*$ mit der Fixpunktgruppe H in G gegeben. Dann besteht eine natürliche 1-1 Abbildung zwischen allen Paaren (f^*, Θ) und allen Paaren $(\{B\}_{\text{red}}, \Theta_{\text{red}})$, wobei $\{B\}_{\text{red}}$ ein auf H reduzierter Faserraum von $\{B\}$ und Θ_{red} ein beliebiger Zusammenhang in $\{B\}_{\text{red}}$ ist.*

Die erwähnte 1-1 Abbildung kommt dadurch zustande, daß man zunächst f^* durch die zu y^* gehörige Reduktionsabbildung den auf H reduzierten Faserraum $\{B\}_{\text{red}}$ von $\{B\}$ und darauf durch die 1-1 Abbildung von Satz 2 den auf $\mathfrak{L}(H)$ reduzierten Zusammenhang Θ_{red} von Θ in $\{B\}_{\text{red}}$ zuordnet. Der Satz 3 entspricht vollkommen dem Reduktionssatz aus 1. 3. Was dieser für die Querschnitte f^* leistet, erreicht der Satz 3 für die Paare (f^*, Θ).

Die vorstehenden Betrachtungen hatten zum Ausgangspunkt einen analytischen Faserraum $\{B\}$ und einen an $\{B\}$ gebundenen, zu $\{B\}$ schwach assoziierten Faserraum $\{B^*\}$. Ab Satz 2 wurde vorausgesetzt, daß die Transformationsgruppe von $\{B^*\}$ transitiv ist. Die Überlegungen sind daher sämtlichst gültig für den Fall, daß $\{B^*\}$ ein Q-Faserraum von $\{B\}$ im Sinne von § 2 ist. Die zuletzt betrachteten Paare (f^*, Θ) bestehen dann aus einem Gruppenfeld f^* der Natur Q in $\{B\}$ und einem mit f^* verträglichen Zusammenhang Θ in $\{B\}$. Ein solches Paar nennen wir eine *Gruppenmetrik der Natur Q in $\{B\}$*. Ist $\{B\}$ der Tangentialfaserraum seines Basisraumes X, so sprechen wir von einer *linearen Gruppenmetrik in X*. Über die bisherigen Entwicklungen hinaus kann man über die Beziehungen zwischen Zusammenhängen und Gruppenfeldern in einem Faserraum $\{B\}$ noch folgendes sagen: Es sei f^* ein Gruppenfeld der Natur Q in $\{B\}$ und α eine $\mathfrak{L}(G)$-wertige lineare Differentialform vom adjungierten Typ in $\{B\}$. Dann heißt α *im engeren Sinne mit f^* verträglich*, wenn in einem Koordinatenraum $(B) \in \{B\}$

$$\alpha_i(x, \mathfrak{x}) \in \mathfrak{L}(f_i(x)), \quad x \in V_i, \ \mathfrak{x} \in \mathfrak{X}_x, \tag{4}$$

identisch gilt. Man beweist wie bei (2), daß diese α auferlegte Bedingung mit dem Transformationsgesetz der Komponenten α_i von α verträglich ist, und daß sie nicht von dem ausgewählten $(B) \in \{B\}$ abhängt. Wegen $f_i^*(x) \subseteq H_i(x)$ und (2) ist jedes im engeren Sinne mit f^* verträgliche α mit f^* verträglich. Unter den oben durch (2) für beliebiges f^* ausgezeichneten α haben wir also durch (4) eine noch engere Klasse hervorgehoben, wenn f^* insbesondere ein Gruppenfeld ist. Dies hat entsprechend dem obigen Vorgang eine engere Klasseneinteilung aller Zusammenhänge in $\{B\}$ zur Folge: Zwei solche Θ, Θ' mögen *im engeren Sinne bezüglich f^* äquivalent* heißen, wenn $\alpha = \Theta' - \Theta$ im engeren Sinne mit f^* verträglich ist. Wegen Satz 1 zerfällt hierdurch insbesondere die Klasse der mit f^* verträglichen Zusammenhänge. Wir nennen schließlich einen Zusammenhang Θ' *mit einer Gruppenmetrik (f^*, Θ) verträglich*, wenn Θ' zu Θ bezüglich f^* im engeren Sinne äquivalent ist. Dann gilt der

Satz 4. *Sei (f^*, Θ) eine Gruppenmetrik in $\{B\}$. Es ist dann Θ mit (f^*, Θ) verträglich, und jeder mit (f^*, Θ) verträgliche Zusammenhang Θ' ist von der Form $\Theta' = \Theta + \alpha$, wobei α eine beliebige mit f^* im engeren Sinne verträgliche Differentialform vom adjungierten Typ ist. Jeder mit (f^*, Θ) verträgliche Zusammenhang ist auch mit f^* verträglich.*

Wir bemerken noch, daß man jedem der in Satz 3 betrachteten Paare $(\bar{f}, \Theta)$ eindeutig eine Gruppenmetrik (f^*, Θ) zuordnen kann: f^* ist das Fixpunktgruppenfeld 2. 2, (5) von $\bar{f}$. Zwei Zusammenhänge in $\{B\}$ sind genau dann bezüglich $\bar{f}$ äquivalent, wenn sie bezüglich f^* im engeren Sinne äquivalent sind.

4. 2. Sei nunmehr $\{B\}$ der Tangentialfaserraum $\{T(X)\}$ der analytischen Mannigfaltigkeit X. Wir betrachten die folgenden Beispiele für Paare (f^*, Θ) eines Querschnittes f^*

in einem zu $\{T(X)\}$ schwach assoziierten Faserraum $\{B^*\}$ und eines mit f^* verträglichen affinen Zusammenhanges Θ in X.

1. Es sei $\{B^*\}$ der Faserraum nicht-singulärer quadratischer Formen der Signatur k über X (vgl. 2. 2). Dann ist f^* eine nicht-singuläre quadratische Differentialform der Signatur k auf X, Θ ein beliebiger mit f^* verträglicher affiner Zusammenhang in X. Hat in einem Koordinatenraum $(T(X))$ in der Koordinatenumgebung V_i die quadratische Differentialform f^* die Komponenten $g_{\mu\nu}$, der affine Zusammenhang Θ die Komponenten ω_ν^μ (wir lassen den Index i in ganz 4. 2 der Einfachheit halber fort), so lautet die Verträglichkeitsbedingung von Θ mit f^*

$$\sum_\lambda g_{\mu\lambda}\omega_\nu^\lambda + \sum_\lambda g_{\lambda\nu}\omega_\mu^\lambda = dg_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Bei gegebenem $\mathring{\gamma} = (\mathring{g}_{\mu\nu})$ aus der Faser P_k von $\{B^*\}$ lassen sich die Paare (f^*, θ) zufolge 4. 1, Satz 3 durch die Paare $(\{T(X)\}_{\text{red}}, \Theta_{\text{red}})$ charakterisieren, wobei $\{T(X)\}_{\text{red}}$ ein auf die zu $\mathring{\gamma}$ gehörige orthogonale Gruppe 2. 2, (9) reduzierter Faserraum und Θ_{red} ein beliebiger Zusammenhang in $\{T(X)\}_{\text{red}}$ ist. Die Lie-Algebra der orthogonalen Gruppe 2, 2, (9) besteht aus allen Matrizen ϱ, für die $\mathring{\gamma}\varrho + {}^t\varrho\mathring{\gamma} = 0$ gilt. Mithin genügen die Komponenten ω_μ^λ von Θ_{red} in jeder Koordinatenumgebung V_i eines Koordinatenraumes von $\{T(X)\}_{\text{red}}$ der Bedingung

$$\sum_\lambda \mathring{g}_{\lambda\mu}\omega_\nu^\lambda + \sum_\lambda \mathring{g}_{\lambda\nu}\omega_\mu^\lambda = 0. \tag{2}$$

2. Bei demselben $\{B^*\}$ wie in 1. wollen wir jetzt alle diejenigen Paare (f^*, Θ) bestimmen, in denen θ ein mit f^* verträglicher symmetrischer affiner Zusammenhang ist. Bekanntlich gibt es zu beliebig gegebenem f^* genau ein derartiges Θ. Seine Bestimmung verläuft in einem holonomen Koordinatenraum folgendermaßen: Sind daselbst f^* bzw. Θ durch die Komponenten $g_{\mu\nu}$ bzw. $\omega_\mu^\lambda = \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda dx^\alpha$ gegeben, so hat man bei gegebenen $g_{\mu\nu}$ wegen (1) und der Symmetrie von Θ das System

$$\begin{cases} \sum_\lambda g_{\mu\lambda}\Gamma_{\alpha\nu}^\lambda + \sum_\lambda g_{\lambda\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^\lambda = \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}, \\ \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda = \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \end{cases} \tag{3}$$

zu lösen. Eine ihrer Technik nach bekannte Rechnung führt auf die einzige Lösung

$$\begin{cases} \Gamma_{\lambda\nu}^\mu = g^{\mu\alpha}\Gamma_{\lambda\nu,\alpha}, \\ \Gamma_{\lambda\nu,\alpha} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\lambda} + \dfrac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\nu} - \dfrac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\alpha}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Das Ergebnis ist also: f^* unterliegt keiner Einschränkung, Θ ist durch f^* eindeutig bestimmt und durch (4) gegeben. Ist f^* insbesondere eine Riemannsche Metrik, so ist die mit (4) definierte Übertragung 3. 3, (13) die bekannte Levi-Civitasche Parallelverschiebung der Tangentialvektoren in X.

Bei gegebenem $\mathring{\gamma} = (\mathring{g}_{\mu\nu}) \in P_k$ können wir auf Grund von 4. 1, Satz 3 eine entsprechende Bestimmung der Paare $(\{T(X)\}_{\text{red}}, \Theta_{\text{red}})$ mit auf die zu $\mathring{\gamma}$ gehörige orthogonale Gruppe reduziertem $\{T(X)\}_{\text{red}}$ und symmetrischem Θ_{red} in $\{T(X)\}_{\text{red}}$ durchführen. Setzen wir bei gegebenem $\{T(X)\}_{\text{red}}$ in einem reduzierten Koordinatenraum $\omega_\mu^\lambda = \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \omega^\alpha$, $\Gamma_{\alpha\mu,\varkappa} = \mathring{g}_{\varkappa\lambda}\Gamma_{\alpha\mu}^\lambda$ und $d\omega^\mu = \frac{1}{2} c_{\alpha\beta}^\mu \omega^\alpha \wedge \omega^\beta$ mit $c_{\alpha\beta}^\mu + c_{\beta\alpha}^\mu = 0$, so ist wegen (2) und 3. 1, (16) das System

$$\begin{cases} \Gamma_{\alpha\nu,\mu} + \Gamma_{\alpha\mu,\nu} = 0, \\ \Gamma_{\alpha\nu,\mu} - \Gamma_{\nu\alpha,\mu} = c_{\nu\alpha,\mu} \end{cases} \tag{5}$$

mit $c_{\nu\varkappa,\mu} = \mathring{g}_{\mu\varkappa} c^{\varkappa}_{\nu\varkappa}$ zu lösen. Eine ähnliche Rechnung wie die von (3) auf (4) führende liefert die einzige Lösung

$$(6)\qquad \begin{cases} \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} &= \mathring{g}^{\mu\varkappa}\Gamma_{\lambda\nu,\varkappa}, \\ \Gamma_{\lambda\nu,\varkappa} &= \frac{1}{2}(c_{\nu\varkappa,\lambda} + c_{\lambda\varkappa,\nu} - c_{\lambda\nu,\varkappa}). \end{cases}$$

$\{T(X)\}_{\text{red}}$ ist also beliebig, Θ_{red} durch $\{T(X)\}_{\text{red}}$ eindeutig bestimmt und durch (6) gegeben, in Übereinstimmung mit obigem Resultat.

3. Sei jetzt $\{B^*\}$ ein pythagoreischer Faserraum von X im Sinne von 2. 2. Dann ist f^* ein Gruppenfeld pythagoreischer Natur, Θ ein beliebiger mit f^* verträglicher affiner Zusammenhang in X. Wir nennen (f^*, Θ) eine *Gruppenmetrik pythagoreischer Natur in X.* Bei gegebener Gruppe K_0 aus der Faser Q von $\{B^*\}$ lassen sich nach 4. 1, Satz 3 die Gruppenmetriken pythagoreischer Natur durch die Paare $(\{T(X)\}_{\text{red}}, \Theta_{\text{red}})$ mit auf den Normalisator H_0 von K_0 in L reduziertem $\{T(X)\}_{\text{red}}$ und beliebigem Zusammenhang Θ_{red} in $\{T(X)\}_{\text{red}}$ charakterisieren. Die Zusammenhänge Θ_{red} in einem $\{T(X)\}_{\text{red}}$ erhält man diesmal folgendermaßen: Ist K_0 wie in 2. 2, (9) durch die Matrix $\mathring{\gamma}$ definiert, so charakterisiert 2. 2, (10) den Normalisator H_0 von K_0. Die Lie-Algebra $\mathfrak{L}(H_0)$ besteht dann aus allen Matrizen ϱ, für die $\mathring{\gamma}\varrho + {}^t\varrho\mathring{\gamma} = c\mathring{\gamma}$ mit $c \in R$ gilt. Daher gilt für die Komponenten von Θ_{red} mit $\mathring{\gamma} = (\mathring{g}_{\mu\nu})$

$$(7)\qquad \sum_{\lambda} \mathring{g}_{\mu\lambda}\omega^{\lambda}_{\nu} + \sum_{\lambda} \mathring{g}_{\lambda\nu}\omega^{\lambda}_{\mu} = \omega\mathring{g}_{\mu\nu},$$

wobei sich die lineare Differentialform ω in $\{T(X)\}_{\text{red}}$ aus (7) sofort zu $\omega = \dfrac{2}{n}\,\omega^{\lambda}_{\lambda}$ berechnet. (7) ist ersichtlich unabhängig von der K_0 definierenden Matrix $(\mathring{g}_{\mu\nu})$.

4. Entsprechend 2. wollen wir diesmal alle Gruppenmetriken (f^*, Θ) von pythagoreischer Natur mit symmetrischem Θ bestimmen, indem wir alle $(\{T(X)\}_{\text{red}}, \Theta_{\text{red}})$ mit symmetrischem Θ_{red} aufsuchen. Dazu denken wir uns $\{T(X)\}_{\text{red}}$ und eine lineare Differentialform ω in $\{T(X)\}_{\text{red}}$ beliebig gegeben und versuchen in einem Koordinatenraum von $\{T(X)\}_{\text{red}}$, in dem $\omega = \varphi_{\alpha}\omega^{\alpha}$ sei, das (5) entsprechende System

$$(8)\qquad \begin{cases} \Gamma_{\alpha\nu,\mu} + \Gamma_{\alpha\mu,\nu} = \varphi_{\alpha}\mathring{g}_{\mu\nu} \\ \Gamma_{\alpha\nu,\mu} - \Gamma_{\nu\alpha,\mu} = c_{\nu\alpha,\mu} \end{cases}$$

zu lösen. Wieder errechnet man sich leicht die einzige Lösung

$$(9)\qquad \begin{cases} \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} &= \mathring{g}^{\mu\varkappa}\Gamma_{\lambda\nu,\varkappa}, \\ \Gamma_{\lambda\nu,\varkappa} &= \frac{1}{2}(c_{\nu\varkappa,\lambda} + c_{\lambda\varkappa,\nu} - c_{\lambda\nu,\varkappa}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathring{g}_{\nu\varkappa}\varphi_{\lambda} + \mathring{g}_{\lambda\varkappa}\varphi_{\nu} - \mathring{g}_{\lambda\nu}\varphi_{\varkappa}). \end{cases}$$

(9) ist ersichtlich unabhängig von der K_0 definierenden Matrix $(\mathring{g}_{\mu\nu})$. Die gesuchten Paare bestehen also aus beliebigen $\{T(X)\}_{\text{red}}$ und den Zusammenhängen (9) in $\{T(X)\}_{\text{red}}$ mit beliebigem $\omega = \varphi_{\alpha}\omega^{\alpha}$.

4. 3. Die vorstehend aufgeführten Beispiele von Paaren (f^*, θ) im Tangentialfaserraum einer analytischen Mannigfaltigkeit X können offenbar als Typen affiner Zusammenhänge in X angesehen werden. Dies ist die Auffassung Cartans von der Sache. In seiner Terminologie handelt es sich in dem Beispiel 1. um die *euklidischen* ([5], S. 391, [6], S. 310ff.), in 2. um die *Levi-Civitaschen* ([5], S. 403, [6], S. 311ff., [7], S. 17ff.), in 3. um die *metrischen* ([5], S. 390ff., [6], S. 319ff., [7], S. 9) und in 4. um die *Weylschen* Zusammenhänge ([5], S. 402ff., [6], S. 320, [7], S. 9ff.). Es besteht jedoch ein grundsätzlicher Unterschied zwischen dem Cartanschen Begriff des affinen Zusammenhanges überhaupt und dem in unserer Arbeit benutzten gleichbenannten Begriff. Auf diesen Unterschied wollen wir kurz zu sprechen kommen.

Sei $\{B\}'$ ein analytischer Faserraum mit der Transformationsgruppe (G', Y, τ'), und sei G' abgeschlossene Untergruppe einer Lieschen Gruppe G, welche ebenfalls analytisch auf Y operiert: (G, Y, τ). Es gelte ferner $\tau' = \tau \mid G' \times Y$. Unter diesen Voraussetzungen ist offenbar durch $\{B\}'$ und (G, Y, τ) ein analytischer Faserraum $\{B\}$ mit der Transformationsgruppe (G, Y, τ) durch die Bedingung eindeutig gegeben, daß $\{B\}'$ ein auf G' reduzierter Faserraum von $\{B\}$ sei. Es ist dies im gewissen Sinne die Umkehrung des Reduktionsvorganges in 1. 3: Wurde dort die Gruppe des Faserraumes verkleinert, so wird sie hier vergrößert (vgl. [11], S. 16ff.). Sei nun speziell $\{B\}'$ der Tangentialfaserraum $\{T(X)\}$ einer analytischen Mannigfaltigkeit X. Nach Definition in 1. 1 ist L_n die Gruppe, R^n die Faser von $\{T(X)\}$, und L_n operiert auf R^n linear und homogen:

$$\bar{y}^\mu = \sum_\nu s^\mu_\nu y^\nu. \tag{1}$$

Sei weiter $G = A_n$ die affine Gruppe vom Grade n, d. h. die Untergruppe von L_{n+1}, welche aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} s^1_1 & \cdots & s^1_n & s^1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ s^n_1 & \cdots & s^n_n & s^n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

besteht, und operiere A_n auf R^n durch die inhomogenen linearen Transformationen

$$\bar{y}^\mu = \sum_\nu s^\mu_\nu y^\nu + s^\mu. \tag{3}$$

L_n ist auf selbstverständliche Weise als abgeschlossenen Untergruppe in A_n eingebettet, $L_n < A_n$, und die Operationen (3) stimmen für Elemente aus L_n mit den Operationen (1) überein. Auf Grund der obigen Bemerkung erhalten wir durch Vergrößerung von L_n zu A_n einen durch $\{T(X)\}$ eindeutig bestimmten Faserraum $\{B\}$ mit der Gruppe A_n, den wir den *affinen Faserraum von* X nennen wollen, und von dem aus gesehen $\{T(X)\}$ ein auf $L_n < A_n$ reduzierter Faserraum ist.

Die Lie-Algebra der Gruppe A_n besteht wegen (2) aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n & a^1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n & a^n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Ein Zusammenhang im affinen Faserraum $\{B\}$ von X — so, wie dieser Begriff in 3. 1 für beliebige analytische Faserräume erklärt wurde, — wird daher in einem Koordinatenraum von $\{T(X)\}$, also in einem reduzierten Koordinatenraum von $\{B\}$, durch ein System von Differentialformen

$$\Theta^\mu_{\lambda,i} = \Gamma^\mu_{\alpha\lambda,i}\,\omega^\alpha_i, \quad \vartheta^\mu_i = \gamma^\mu_{\alpha,i}\,\omega^\alpha_i \tag{5}$$

charakterisiert, wobei ω^α_j die Querprojektionen in $\{T(X)\}$ sind. Im Durchschnitt $V_i \frown V_j$ zweier Koordinatenumgebungen gilt wegen 3. 1, (10)

$$\begin{cases} \Theta^\mu_{\nu,i} = \overset{-1}{s}{}^\mu_{\lambda,ji}\,\Theta^\lambda_{\varkappa,j}\,s^\varkappa_{\nu,ji} + \overset{-1}{s}{}^\mu_{\lambda,ji}\,ds^\lambda_{\nu,ji}, \\ \vartheta^\mu_i = \overset{-1}{s}{}^\mu_{\lambda,ji}\,\vartheta^\lambda_j \end{cases} \tag{6}$$

während der Übergang zu einem anderen Koordinatenraum von $\{T(X)\}$ — nur solche wollen wir in Betracht ziehen — wegen 3. 1, (10′) durch die entsprechenden Formeln

$$(6') \qquad \begin{cases} \Theta^{\mu}_{\nu,j} = \overset{-1}{\bar{s}}{}^{\mu}_{\lambda,kj}\, \Theta'^{\lambda}_{\alpha,k}\, \bar{s}^{\alpha}_{\nu,kj} + \overset{-1}{s}{}^{\mu}_{\lambda,kj}\, d\bar{s}^{\lambda}_{\nu,kj}, \\ \vartheta^{\mu}_{j} = \overset{-1}{\bar{s}}{}^{\mu}_{\lambda,kj}\, \vartheta'^{\lambda}_{k} \end{cases}$$

gegeben ist. Unter den Zusammenhängen im affinen Faserraum von X betrachtet nun Cartan als affine Zusammenhänge diejenigen, für welche identisch

$$(7) \qquad \det(\gamma^{\mu}_{\lambda,i}) \neq 0$$

für die Koeffizientenmatrix der Form ϑ in der Darstellung (5) gilt, eine wegen (6), (6′) invariante Eigenschaft. Wie man leicht mit Hilfe von 1. 1, Satz 1 nachweist, ist (7) gleichbedeutend mit der Forderung, daß es einen Koordinatenraum von $\{T(X)\}$ gibt, in welchem

$$(8) \qquad \vartheta^{\lambda}_{i} = \omega^{\lambda}_{i},$$

also $\gamma^{\lambda}_{\mu,i} = \delta^{\lambda}_{\mu}$ identisch gilt. Dieser ist dann offenbar durch den Zusammenhang eindeutig bestimmt, und es ist derjenige, in welchem Cartan für gewöhnlich rechnet (vgl. [5], S. 362ff.). Ein affiner Zusammenhang in X im Sinne von Cartan ist mithin ein Paar (Θ, ϑ), bestehend aus einem affinen Zusammenhang Θ in X in unserem Sinne — dem von Cartan so benannten *rotatorischen* Anteil von (Θ, ϑ) — und einer R^n-wertigen 1-fach kontravarianten tensoriellen linearen Differentialform ϑ in X, welche (7) genügt und welche Cartan den *translatorischen* Anteil von (Θ, ϑ) nennt. Von den eingangs erwähnten Typen Cartanscher affiner Zusammenhänge in X erhält man nun die euklidischen bzw. metrischen als Zusammenhänge in denjenigen Faserräumen, welche aus $\{T(X)\}$ durch Reduktion auf die orthogonalen Gruppen bzw. deren Normalisatoren in L_n und darauf folgende Vergrößerung dieser Gruppen durch Hinzunahme der Translationen entstehen. Die Levi-Civitaschen bzw. Weylschen Zusammenhänge sind dann solche euklidischen bzw. metrischen, deren rotatorischer Anteil symmetrisch ist. Die rotatorischen Anteile dieser Cartanschen Typen sind die in 4. 2 betrachteten Beispiele.

Wir wollen abschließend die Beziehung angeben, in welcher die durch (5) und (7) definierten Cartanschen affinen Zusammenhänge zu der Ehresmannschen Axiomatisierung dieses Begriffes stehen ([10], S. 43). Nach Ehresmann ist ein Cartanscher affiner Zusammenhang in X durch eine $\mathfrak{L}(A_n)$-wertige lineare Differentialform (Φ, φ) auf dem Bündel des assoziierten Hauptfaserraumes von $\{T(X)\}$ gegeben, welche gewissen Bedingungen unterworfen ist. Ohne auf diese näher eingehen zu wollen, bemerken wir nur, daß die (Φ, φ) und (Θ, ϑ) in einem Koordinatenraum von $\{T(X)\}$ durch

$$(9) \qquad \begin{cases} \Phi^{\mu}_{\lambda,i} = \overset{-1}{h}{}^{\mu}_{\alpha,i}\, dh^{\alpha}_{\lambda,i} + \overset{-1}{h}{}^{\mu}_{\alpha,i}\, \Theta^{\alpha}_{\beta,i}\, h^{\beta}_{\lambda,i}, \\ \varphi^{\mu}_{i} = \overset{-1}{h}{}^{\mu}_{\alpha,i}\, \vartheta^{\alpha}_{i} \end{cases}$$

eineindeutig einander zugeordnet sind, wobei $(h^{\mu}_{\alpha,i})$ die Querprojektionen im $(T(X))$ durch 3. 3, (6) zugeordneten Koordinatenraum des assoziierten Hauptfaserraumes sind.

4. 4. Sei $\{B\}$ ein analytischer Faserraum. Wir wollen in diesem Abschnitt die Verträglichkeit eines Zusammenhanges Θ mit einem Gruppenfeld f^* in $\{B\}$ sowie die Verträglichkeit eines Zusammenhanges Θ' mit einer Gruppenmetrik (f^*, Θ) in $\{B\}$ mit Hilfe des Begriffes der Übertragung charakterisieren, sofern die Natur Q von f^* bzw. (f^*, Θ) eine gewisse einschränkende Voraussetzung erfüllt.

Es sei (G, Y, τ) eine analytische Transformationsgruppe, K eine abgeschlossene Untergruppe von G. Dann operiert auch K analytisch auf Y und induziert Transitivitätsklassen in Y. Zwei Elemente $y, y' \in Y$ derselben Transitivitätsklasse nennen wir auch *äquivalent*, in Zeichen $y \sim y'$. Wir betrachten nur solche Untergruppen K, für welche folgende Bedingung gilt:

(a) Aus $g \cdot y \sim y$ für ein festes $g \in G$ und alle $y \in Y$ folgt $g \in K$.

Gilt (a) für K, so auch für jede zu K konjugierte Untergruppe. Man beweist leicht den

Hilfssatz 1. *Unter der Voraussetzung* (a) *führt ein $g \in G$ genau dann irgendzwei äquivalente $y, y' \in Y$ wieder in zwei äquivalente über, wenn g im Normalisator H von K in G liegt.*

Sei jetzt $\{B\}$ ein analytischer Faserraum und f^* ein Gruppenfeld der Natur Q in $\{B\}$. Ein $K \in Q$ erfülle die Bedingung (a), welche damit auch für jedes $K \in Q$ gilt. f^* induziert in jeder Faser Y_x eine Einteilung in Transitivitätsklassen. Ein analytischer Isomorphismus η: $Y_x \to Y_{x_1}$ heiße *f^*-zulässig*, wenn aus $b \sim b'$ für $b, b' \in Y$ stets $\eta(b) \sim \eta(b')$ folgt. Dann gilt der

Hilfssatz 2. *Sei $K \in Q$ gegeben und $\{B\}_{\text{red}}$ der f^* durch die zu K gehörige Reduktionsabbildung zugeordnete reduzierte Faserraum mit der Gruppe H. Ein analytischer Isomorphismus η: $Y_x \to Y_{x_1}$ ist genau dann f^*-zulässig, wenn er zulässig in $\{B\}_{\text{red}}$ im Sinne der Definition in* 3. 3 *ist.*

Zum Beweis führen wir einen Koordinatenraum $(B)_{\text{red}}$ ein. Die Zulässigkeit von η in $\{B\}_{\text{red}}$ bedeutet dann wegen 3. 3 die Darstellbarkeit $\eta = \Phi_{j,x_1} h \Phi_{i,x}^{-1}$ mit $h \in H$ oder — in anderer Schreibweise — $\Phi_{j,x}^{-1} \eta \Phi_{i,x} \in H$. Sei nun η zulässig in $\{B\}_{\text{red}}$, und seien $b, b' \in Y_x$ mit $b \sim b'$ gegeben. Dann existiert ein $a^* \in f^*(x)$ mit $b' = a^* \cdot b$. Da nun f^* konstant mit dem Wert K in $\{B\}_{\text{red}}$ ist, gilt die Darstellung $a^* \cdot b = \Phi_{i,x} a \Phi_{i,x}^{-1}(b)$ mit $a \in K$. Es ist aber H der Normalisator von K. Daher gilt

$$\begin{aligned} \eta(b') &= \Phi_{j,x_1} h \Phi_{i,x}^{-1}(a^* b) = (\Phi_{j,x_1} h \Phi_{i,x}^{-1})\,(\Phi_{i,x} a \Phi_{i,x}^{-1}(b)) \\ &= \Phi_{j,x_1} h a \Phi_{i,x}^{-1}(b) \quad = \Phi_{j,x_1} a' h \Phi_{i,x}^{-1}(b) \end{aligned}$$

mit $a' \in K$. Also gilt weiter

$$\eta(b') = (\Phi_{j,x_1} a' \Phi_{j,x_1}^{-1})\,(\Phi_{j,x_1} h \Phi_{i,x}^{-1}(b)) = a'^* . \eta(b)$$

mit $a'^* \in f^*(x_1)$, wieder wegen der Konstanz von f^*. Es folgt also $\eta(b') \sim \eta(b)$, d. h. η ist f^*-zulässig. — Sei umgekehrt letzteres der Fall, und seien diemal $y, y' \in Y$ mit $y \sim y'$ gegeben. Dann existiert ein $a \in K$ mit $y' = ay$. Wir setzen $b = \Phi_{i,x}(y)$, $b' = \Phi_{i,x}(y')$. Es folgt $b' = a^* \cdot b$ mit $a^* = \Phi_{i,x} a \Phi_{i,x}^{-1} \in f^*(x)$ wegen der Konstanz von f^*. Nach Voraussetzung existiert dann $a'^* \in f^*(x)$ mit $\eta(b') = a'^* \cdot \eta(b)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{j,x_1}^{-1} \eta \Phi_{i,x}(y') &= \Phi_{j,x_1}^{-1} \eta(b') = \Phi_{j,x}^{-1} a'^* \eta(b) \\ &= (\Phi_{j,x_1}^{-1} a' \Phi_{i,x})\,(\Phi_{j,x_1}^{-1} \eta \Phi_{i,x}(y)) \\ &= a' \Phi_{j,x}^{-1} \eta \Phi_{i,x}(y) \end{aligned}$$

mit $a' \in K$. Aus $y \sim y'$ folgt also $\Phi_{j,x_1}^{-1} \eta \Phi_{i,x}(y') \sim \Phi_{j,x}^{-1} \cdot \eta \Phi_{i,x}(y)$. Hilfssatz 1 liefert $\Phi_{j,x}^{-1} \eta \Phi_{i,x} \in H$, d. h. η ist zulässig in $\{B\}_{\text{red}}$.

Nennen wir nunmehr einen Zusammenhang Θ in $\{B\}$ *kongruent bezüglich f^**, wenn die Abbildungen 3. 3, (13) der mit Θ definierten Übertragung für jede Kurve C in X identisch in t die f^*-Zulässigkeit besitzen, so gilt der

Satz 1. *Θ ist genau dann kongruent bezüglich f^*, wenn Θ mit f^* verträglich ist.*

Wegen Hilfssatz 2 ist mit den dortigen Bezeichnungen die f^*-Zulässigkeit der Abbildungen C_t aus 3. 3, (13) in einem $(B)_{\text{red}}$ mit $C_i\ (t) = \tilde{p}_i C(t) \in H$ gleichbedeutend, $\tilde{p}_i$ die Querprojektionen im assoziierten Hauptfaserraum $\{\tilde{B}\}$ von $\{B\}$. Wegen 3. 3, (12) ist dies wiederum gleichbedeutend mit der $\mathfrak{L}(H)$-Wertigkeit der Θ_t. Der Satz 2 aus 4. 2 vervollständigt den Beweis von Satz 1.

Sei jetzt (f^*, Θ) eine Gruppenmetrik in $\{B\}$. Ein Zusammenhang Θ' in $\{B\}$ heiße *kongruent bezüglich* (f^*, Θ), wenn die Übertragungen 3. 3, (13) von Θ und Θ' für jede Basiskurve E identisch in t in der Beziehung

$$C'_t C'^{-1}_0 = h_t \cdot C_t \cdot C_0^{-1} \text{ mit } h_t \in f^*(E(t)) \tag{1}$$

zueinander stehen. Es gilt der Satz 1 entsprechende

Satz 2. *Θ' ist genau dann kongruent bezüglich (f^*, Θ), wenn Θ' mit (f^*, Θ) verträglich ist.*

(1) ist in einem reduzierten Koordinatenraum gleichbedeutend mit $C'_i(t) = h_i(t) \cdot C_i(t)$, $h_i(t) \in K$, $h_i(0) = e$. Setzen wir noch $\bar{h}_i(t) = C_i(t)^{-1} \cdot h_i(t) \cdot C_i(t)$, so erhalten wir wegen $C_i(t) \in H$ die äquivalente Bedingung $C'_i(t) = C_i(t)\ \bar{h}_i(t)$, $\bar{h}_i(t) \in K$, $\bar{h}_i(0) = e$ für (1). Dies besagt aber wegen 3. 1, (8) dasselbe wie

$$\delta C'^{-1}_i \omega = ad(C_i)\ \delta \bar{h}_i^{-1} \omega + \delta C_i^{-1} \omega$$

mit $\bar{h}_i(t) \in K$, $\bar{h}_i(0) = e$. Wegen 3. 3, (12) erhalten wir mit $\alpha_i = \Theta'_i - \Theta_i$ und $E = \tilde{p}C = \tilde{p}C'$ als Basiskurve die Bedingung

$$\delta E \alpha_i = ad(C_i)\ \delta \bar{h}_i^{-1} \omega \text{ mit } \bar{h}_i(t) \in K,\ \bar{h}_i(0) = e \tag{2}$$

als notwendig und hinreichend für die Kongruenz von Θ' bezüglich (f^*, Θ). Gleichung (2) besagt aber die $\mathfrak{L}(K)$-Wertigkeit der α_i. Mit 4. 1, Satz 4 folgt der Satz 2.

Nach dem Voraufgegangenen ist die — wenn man so sagen will — geometrische Bedeutung der Verträglichkeit eines Zusammenhanges Θ' mit einem Gruppenfeld f^* bzw. einer Gruppenmetrik (f^*, Θ) unter der Voraussetzung (a) die folgende: f^* induziert in jeder Faser Y_x des gegebenen Faserraumes $\{B\}$ eine Klasseneinteilung und damit eine Gesamtheit W_x von Klassen äquivalenter $b, b' \in Y_x$. Nach Satz 1 ist ein Zusammenhang Θ genau dann mit f^* verträglich, wenn die mit Θ definierte Übertragung die Klassenmengen W_x aufeinander abbildet, oder — wie wir kurz sagen wollen — *überträgt*. Zu einer Gruppenmetrik (f^*, Θ) gehört mithin eine Übertragung der W_x. Nach Satz 2 ist ein Zusammenhang Θ' genau dann mit (f^*, Θ) verträglich, wenn Θ' die W_x überträgt und diese Übertragung mit der zu (f^*, Θ) gehörigen übereinstimmt. Im Falle eines Tangentialfaserraumes liefern daher unter der Voraussetzung (a) die Begriffe Gruppenfeld, Zusammenhang, Gruppenmetrik sowie die sie verknüpfenden Verträglichkeitsbegriffe eine völlig adäquate formale Wiedergabe der mehr geometrischen Begriffe, welche Weyl im Zusammenhang mit seinem Raumproblem in die Infinitesimalgeometrie eingeführt hat ([14], S. 47—48). In der Weylschen Ausdrucksweise charakterisiert die Gruppe $f^*(x)$ bei gegebener Gruppenmetrik (f^*, Θ) die „*kongruenten Abbildungen des Vektorkörpers in $x \in X$ auf sich*", während $\Theta(x)$ ein „*System infinitesimaler kongruenter Verpflanzungen von x nach den sämtlichen Punkten der Umgebung von x*" darstellt. Ein mit (f^*, Θ) verträglicher symmetrischer affiner Zusammenhang bedeutet in der Weylschen Terminologie ein „*System infinitesimaler Parallelverschiebungen, welches zugleich ein System infinitesimaler kongruenter Verpflanzungen ist*".

Für eine Gruppenmetrik pythagoreischer Natur ist die Voraussetzung (a) selbstverständlich erfüllt. Die Beziehung dieses Begriffes zu dem Begriff der Weylschen Metrik

ist folgende: Das Gruppenfeld pythagoreischer Natur gibt die multiplikativ nur bis auf eine Ortsfunktion bestimmte quadratische Differentialform der Weylschen Metrik wieder, während die additiv nur bis auf eine totale lineare Differentialform bestimmte lineare Differentialform der Weylschen Metrik durch den Zusammenhang der pythagoreischen Gruppenmetrik bestimmt ist, und sich in einem reduzierten Faserraum wegen 4. 2, (7) zu

$$\omega = \frac{2}{n}\,\omega^{\lambda}_{\lambda} \tag{3}$$

berechnet (vgl. [14], S. 16ff.). Jede Gruppenmetrik pythagoreischer Natur bestimmt also eindeutig eine Weylsche Metrik, und die Überlegungen zum Beispiel 4. in 4. 2 zeigen, daß jede Weylsche Metrik auf diese Weise bestimmt werden kann. Natürlich gilt nicht die Umkehrung: Genau diejenigen Gruppenmetriken pythagoreischer Natur führen zu derselben Weylschen Metrik, die aus einer, (f^*, Θ), hervorgehen, indem man Θ durch einen beliebigen mit (f^*, Θ) verträglichen Zusammenhang Θ' ersetzt: (f^*, Θ'). Aber unter ihnen ist wegen 4. 2, 4 stets genau eine Gruppenmetrik mit symmetrischem Zusammenhang.

§ 5. Das Weylsche Raumproblem.

Mit den §§ 1—4, insbesondere mit dem in 4. 1 aufgestellten Begriff der Gruppenmetrik von bestimmter Natur, haben wir eine mathematisch einwandfreie Grundlage zur Behandlung des Weylschen Raumproblems geschaffen. Sie möge an die Stelle der kurzen Bemerkungen treten, welche Weyl selbst seinem Problem vorangeschickt hat (z. B. in [14], S. 43—48). Von den beiden Forderungen, welche er darauf an die Natur einer Metrik stellt ([14], S. 49), ziehen wir nur die eine heran (s. u.) und sprechen diese folgendermaßen aus:

Postulat (W). *Es sei Q eine Klasse von abgeschlossenen Untergruppen der vollen linearen Gruppe L_n. Jede lineare Gruppenmetrik der Natur Q besitze genau einen verträglichen symmetrischen affinen Zusammenhang.*

Wir bemerken sogleich: Auf Grund der Überlegungen in 4. 3 kann man für diejenigen Q, welche die dortige Voraussetzung (a) erfüllen, in dem Postulat (W) den Begriff „verträglich" durch „kongruent" ersetzen und gelangt damit zu der eigentlichen Weylschen Formulierung des Postulats. Die Fragestellung von Weyl war nun im wesentlichen: Welche Q sind durch das Postulat (W) ausgezeichnet? Die von Weyl selbst gegebene Antwort lautet folgendermaßen:

Hauptsatz. *Für $n \geqq 3$ erfüllt Q genau dann das Postulat (W), wenn es eine Gruppe $K \in Q$ gibt, deren Lie-Algebra aus der Gesamtheit aller Matrizen der Form*

$$\varrho = \gamma^{-1}\alpha,\ {}^t\gamma = \gamma,\ \det(\gamma) \neq 0,\ {}^t\alpha + \alpha = 0 \tag{1}$$

mit festem γ und beliebigem α besteht. Für $n = 2$ erfüllt Q genau dann das Postulat (W), wenn es ein $K \in Q$ gibt, dessen Lie-Algebra eine der folgenden ist (diese Lie-Algebren sind alle 1-dimensional, und wir geben sie durch eine Basismatrix an):

$$1)\ \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \qquad 2)\ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad (a^2 - 1 \neq 0),$$

$$3)\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (a \neq 0), \qquad 4)\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad (a \neq 0).$$

Wir geben zunächst einige Erläuterungen zu diesem Satz und dem Postulat (W). An der Formulierung des Hauptsatzes erkennt man sofort, *daß nicht die orthogonalen Gruppen, sondern ihre Lie-Algebren* (1) *ausgezeichnet werden und daß dementsprechend*

streng genommen keine Auszeichnung der Gruppenmetriken von pythagoreischer Natur vorliegt. Die an sich keine Schwierigkeiten bietende Aufzählung aller abgeschlossenen Untergruppen von L_n, deren Lie-Algebra die Lie-Algebra einer orthogonalen Gruppe ist, wollen wir nicht vornehmen. Die durch die ausgezeichneten Lie-Algebren eindeutig bestimmten zusammenhängenden Gruppen sind im Falle $n \geqq 3$ gerade die speziellen orthogonalen Gruppen, im Falle $n = 2$ gerade alle 1-dimensionalen zusammenhängenden analytischen Transformationsgruppen der Ebene, wie sie schon Lie bestimmt hat. Weyl stellte neben das Postulat (W) noch zwei weitere: Das der „Freiheit der Metrik", welches wir durch den Hilfssatz 1 dieses Paragraphen als erfüllt nachweisen werden, und das der Volumtreue, d. h. der Beschränkung auf Untergruppen der speziellen linearen Gruppe. Letzteres ist bereits von Weyl mehrmals als überflüssig erwähnt worden ([14], S. 61, 107, 112). Nur für den Fall $n = 2$ ist es notwendig: Aus den im Hauptsatz aufgezählten Fällen 1) bis 4) zeichnet es offenbar gerade die Fälle 1) und 2) mit $a = 0$ aus, also die Lie-Algebren der orthogonalen Gruppen.

Wir gehen nunmehr an den *Beweis des Hauptsatzes.* Es ist zunächst unser Ziel, das Postulat (W) im gewissen Sinne zu algebraisieren. Von der in den §§ 1—4 gewonnenen Grundlage aus wollen wir zuerst diejenige algebraische Folgerung, welche Weyl als Ausgangspunkt seines Beweises genommen hat, als wirkliches Kriterium für ein Q, das dem Postulat (W) genügt, nachweisen (vgl. [14], S. 49ff.). Dies geschieht durch den

Satz 1. *Die Klasse Q von abgeschlossenen Untergruppen von L_n erfüllt das Postulat (W) genau dann, wenn es in Q eine Gruppe K gibt, deren Lie-Algebra $\mathfrak{L}(K)$ folgende Eigenschaft hat: Jedes System von n^3 reellen Zahlen $\Lambda^{\iota}_{\varkappa\alpha}$ läßt sich auf genau eine Weise als Summe*

$$\Lambda^{\iota}_{\varkappa\alpha} = \Gamma^{\iota}_{\varkappa\alpha} + \mathsf{A}^{\iota}_{\varkappa\alpha} \tag{1}$$

darstellen, wobei $\Gamma^{\iota}_{\alpha\varkappa} = \Gamma^{\iota}_{\varkappa\alpha}$ gilt, und die n Matrizen $(\mathsf{A}^{\iota}_{1\alpha}), \ldots, (\mathsf{A}^{\iota}_{n\alpha})$ zu $\mathfrak{L}(K)$ gehören.

Zusatz. Wenn ein $K_0 \in Q$ die soeben formulierte Eigenschaft hat, so kommt diese jedem $K \in Q$ zu.

Der Zusatz folgt ohne weiteres unter Benutzung von 4. 1, (3) und 3. 1, (12). — Wir beweisen zunächst: Hat Q die in Satz 1 formulierte Eigenschaft, so erfüllt Q das Postulat (W). Es sei nämlich in einer n-dimensionalen analytischen Mannigfaltigkeit X irgendeine lineare Gruppenmetrik (f^*, Θ) der Natur Q gegeben. Wir führen einen holonomen Koordinatenraum von $T(X)$ ein, in dem Θ die Komponenten $\Theta_j = (\Lambda^{\iota}_{\varkappa\alpha,j} dx^{\varkappa}_j)$ habe. Nach Voraussetzung gilt dann identisch für $x \in V_j$ die Darstellung

$$\Lambda^{\iota}_{\varkappa\alpha,j}(x) = \Gamma^{\iota}_{\varkappa\alpha,j}(x) + \mathsf{A}^{\iota}_{\varkappa\alpha,j}(x) \tag{2}$$

mit $\Gamma^{\iota}_{\varkappa\alpha,j}(x) = \Gamma^{\iota}_{\alpha\varkappa,j}(x)$ und $(\mathsf{A}^{\iota}_{1\alpha,j}(x)), \ldots, (\mathsf{A}^{\iota}_{n\alpha,j}(x)) \in \mathfrak{L}(f^*_j(x))$. Wir setzen $\Theta'_j = (\Gamma^{\iota}_{\varkappa\alpha,j} dx^{\varkappa}_j)$, $\alpha_j = (\mathsf{A}^{\iota}_{\varkappa\alpha,j} dx^{\varkappa}_j)$ und behaupten, daß damit die Komponentensysteme eines analytischen Zusammenhanges Θ', bzw. einer analytischen $\mathfrak{L}(L_n)$-wertigen linearen Differentialform α vom adjungierten Typ gewonnen sind. Es ist nämlich in $V_i \frown V_j$ wegen 3. 1, (14)

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\lambda}_{\nu\mu,i} &= \frac{\partial x^{\lambda}_i}{\partial x^{\varkappa}_j} \cdot \frac{\partial x^{\alpha}_j}{\partial x^{\nu}_i} \cdot \frac{\partial x^{\beta}_j}{\partial x^{\mu}_i} \Lambda^{\varkappa}_{\alpha\beta,j} + \frac{\partial x^{\lambda}_i}{\partial x^{\varkappa}_j} \cdot \frac{\partial^2 x^{\varkappa}_j}{\partial x^{\nu}_i \partial x^{\mu}_i} \\
&= \left\{ \frac{\partial x^{\lambda}_i}{\partial x^{\varkappa}_j} \cdot \frac{\partial x^{\alpha}_j}{\partial x^{\nu}_i} \cdot \frac{\partial x^{\beta}_j}{\partial x^{\mu}_i} \Gamma^{\varkappa}_{\alpha\beta,j} + \frac{\partial x^{\lambda}_i}{\partial x^{\varkappa}_j} \cdot \frac{\partial^2 x^{\varkappa}_j}{\partial x^{\nu}_i \partial x^{\mu}_i} \right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{\partial x^{\lambda}_i}{\partial x^{\varkappa}_j} \cdot \frac{\partial x^{\alpha}_j}{\partial x^{\nu}_i} \cdot \frac{\partial x^{\beta}_j}{\partial x^{\mu}_i} \mathsf{A}^{\varkappa}_{\alpha\beta,j} \right\}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die erste Klammer mit $\overset{\bullet}{\widetilde{\Gamma}}{}^{\lambda}_{\nu\mu,i}$, die zweite mit $\widetilde{\mathsf{A}}^{\lambda}_{\nu\mu,i}$, so gilt $\widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\nu\mu,i}(x) = \widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu,i}(x)$ und $(\widetilde{\mathsf{A}}^{\lambda}_{1\mu,i}(x)), \ldots, (\widetilde{\mathsf{A}}^{\lambda}_{n\mu,i}(x)) \in \mathfrak{L}(f_i^*(x))$ für $x \in V_i \frown V_j$. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (2) folgt $\widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\nu\mu,i} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu,i}$ und $\widetilde{\mathsf{A}}^{\lambda}_{\nu\mu,i} = \mathsf{A}^{\lambda}_{\nu\mu,i}$ in $V_i \frown V_j$. Entsprechend beweist man, daß Θ' und α nicht von dem ausgewählten Koordinatenraum abhängen. Die Analytizität von Θ' und α folgt ohne weiteres aus der von Θ, indem man einen zu $K \in Q$ f^* gehörigen reduzierten Koordinatenraum von $\{T(X)\}$ einführt, wo dann $(\mathsf{A}^{\iota}_{1\varkappa,i}(x)), \ldots, (\mathsf{A}^{\iota}_{n\varkappa,i}(x)) \in \mathfrak{L}(K)$ identisch gilt. In (2) tritt nur eine Darstellung des Vektorraumes der Λ als direkte Summe der Vektorräume der Γ und A auf, und man erhält die $\Gamma^{\iota}_{\varkappa\alpha,i}$ bzw. die $\mathsf{A}^{\iota}_{\varkappa\alpha,i}$ aus den $\Lambda^{\iota}_{\varkappa\alpha,i}$ durch Projektion nach diesen Räumen, woraus ihre Analytizität folgt. Nun ist nach Konstruktion α mit f^* im engeren Sinne verträglich, also ist Θ' wegen 4. 1, Satz 4 mit (f^*, Θ) verträglich. Aus der Eindeutigkeit der Darstellung (1) folgt schließlich, daß Θ' der einzige mit (f^*, Θ) verträgliche symmetrische Zusammenhang ist.

Zum Beweis der anderen Richtung von Satz 1 müssen wir noch einige Vorbetrachtungen anstellen. Ist $\{B\}$ ein analytischer Faserraum, $U \leqq X$ eine offene Menge seines Basisraumes, so läßt sich $\{B\}$ auf selbstverständliche Weise auf einen Faserraum $\{B \mid U\}$ mit dem Basisraum U einschränken ([11], S. 9ff.). Ein Gruppenfeld bzw. ein Zusammenhang in $\{B \mid U\}$ heiße ein *lokales Gruppenfeld* bzw. ein *lokaler Zusammenhang* in $\{B\}$.

Hilfssatz 1. *Sei $\{B\}$ ein analytischer Faserraum, $x_0 \in X$ und V_{i_0} eine zu einem Koordinatenraum $(B) \in \{B\}$ gehörige Koordinatenumgebung von x_0. Sei ferner K eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe G von $\{B\}$ und Θ_0: $\mathfrak{X}_{x_0} \to \mathfrak{L}(G)$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es in einer Umgebung U von x_0 eine lokale Gruppenmetrik (f^*, Θ) in $\{B\}$ von der durch K bestimmten Natur, so daß in der Koordinatenumgebung $V_{i_0} \frown U$ von $\{B \mid U\}$ erstens $f^*_{i_0}(x_0) = K$ und zweitens $\Theta_{i_0}(x_0) = \Theta_0$ gilt.*

Zunächst existiert offenbar eine Umgebung U von x_0 mit $U \leqq V_{i_0}$ und eine analytische Abbildung g: $U \to G$ mit $g(x_0) = e$, sowie $(\delta g\omega)_e = \Theta_0$. Wir setzen $\bar{g}_j$: $U \frown V_j \to G$, $\bar{g}_j = g\, g_{ji_0}^{-1}$ mit der Koordinatenumgebung V_j und der Koordinatentransformation g_{ji_0} von (B). Dann gilt in $U \frown V_j \frown V_k$ offenbar $\bar{g}_k g_{kj} = \bar{g}_j$. Auf Grund von 1. 1, Satz 1 können wir also den auf U eingeschränkten Koordinatenraum $(B \mid U)$ von (B) mit den g_j in einen Koordinatenraum $(B \mid U)'$ transformieren, der nur die eine Koordinatenumgebung U hat. Mit der zugehörigen Koordinatenfunktion Φ' definieren wir das (konstante) Gruppenfeld $f^*(x) = \Phi'^*(x, K)$ und den Zusammenhang $\Theta(x) = 0$ in $\{B \mid U\}$. Dann ist Θ a fortiori $\mathfrak{L}(H)$-wertig, H der Normalisator von K in G, also wegen 4. 1, Satz 2 mit f^* verträglich: (f^*, Θ) ist eine lokale Gruppenmetrik in U. Es gilt $f^*_{i_0}(x_0) = \bar{g}_{i_0}^{-1}(x_0)\, K \bar{g}_{i_0}(x_0) = g^{-1}(x_0)\, K g(x_0) = K$ und $\Theta_{i_0}(x_0) = ad(g_i^{-1}(x_0))\, \Theta(x_0) + (\delta \bar{g}_{i_0}\, \omega)_e = (\delta g\omega)_e = \Theta_0$, w. z. b. w.

Hilfssatz 2. *Seien wie in Hilfssatz 1 der Faserraum $\{B\}$, $x_0 \in X$ und V_{i_0} gegeben. Sei diesmal f^* ein in x_0 lokales Gruppenfeld in $\{B\}$ und α_0: $\mathfrak{X}_{x_0} \to \mathfrak{L}(K)$, $K = f^*_{i_0}(x_0)$, eine lineare Abbildung. Dann gibt es in x_0 eine lokale $\mathfrak{L}(G)$-wertige lineare Differentialform α vom adjungierten Typ in $\{B\}$, die mit f^* im engeren Sinne verträglich ist und für die $\alpha_{i_0}(x_0) = \alpha_0$ ist. Ist $\{B\}$ ein Tangentialfaserraum und ist $\alpha_0 = (\overset{\circ}{A}{}^{\iota}_{\varkappa\lambda}\, \omega^{\varkappa}_{i_0}(x_0))$ mit $\overset{\circ}{\mathsf{A}}{}^{\iota}_{\lambda\varkappa} = \overset{\circ}{\mathsf{A}}{}^{\iota}_{\varkappa\lambda}$, so kann α symmetrisch gefunden werden.*

Zunächst existiert offenbar eine Umgebung U von x mit $U \leqq V_{i_0}$, eine analytische Abbildung g: $U \to G$ mit $g(x_0) = e$ und $f^*_{i_0}(x) = g^{-1}(x)\, K g(x)$ für $x \in U$ und schließlich eine $\mathfrak{L}(K)$-wertige lineare Differentialform α in U mit $\alpha(x_0) = \alpha_0$. Wie beim Beweis von Hilfssatz 1 transformieren wir $(B \mid U)$ mit $\bar{g}_j = g \cdot g_{ji_0}^{-1}$ in ein $(B \mid U)'$ mit der einzigen Koordinatenumgebung U. Die Komponente von f^* ist dort $f^*_U(x) = K$. In $\{B \mid U\}$ definiert

α eine $\mathfrak{L}(G)$-wertige lineare Differentialform vom adjungierten Typ mit der Komponente $\alpha_U = \alpha$ in $(B \mid U)'$. Offenbar ist α mit f^* im engeren Sinne verträglich, und es gilt $\alpha_{i_0}(x_0) = \alpha_0$. Der Zusatz ergibt sich, indem man α z. B. konstant wählt.

Sei nun für Q das Postulat (W) erfüllt, und seien n^3 reelle Zahlen $\Lambda^\iota_{\varkappa\alpha}$ beliebig gegeben. Wir wählen eine n-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit X, ein $x_0 \in X$, einen holonomen Koordinatenraum $(T(X))$ und eine Koordinatenumgebung V_i aus $(T(X))$, die x_0 enthält. Nach Hilfssatz 1 existiert dann in einer Umgebung U von x_0 eine lineare Gruppenmetrik (f^*, Θ) der Natur Q mit $f_i(x_0) = K$, $K \in Q$ beliebig gegeben, und $\Theta_i(x_0) = (\Lambda^\iota_{\varkappa\alpha}(dx_i^\varkappa)_{x_0})$. Nach Voraussetzung besitzt (f^*, Θ) einen verträglichen symmetrischen Zusammenhang Θ', und da $(T(X))$ holonom gewählt war, gilt mit $\Theta'_i = (\Gamma^\iota_{\alpha\varkappa,i} dx_i^\alpha)$ in x_0 die Symmetrie $\Gamma^\iota_{\varkappa\alpha,i}(x_0) = \Gamma^\iota_{\alpha\varkappa,i}(x_0)$. Nach 4. 1, Satz 4 ist $\alpha = \Theta - \Theta'$ eine mit f^* im engeren Sinne verträgliche Differentialform vom adjungierten Typ, so daß also mit $\alpha_i = (\mathsf{A}^\iota_{\lambda\varkappa,i} dx_i^\lambda)$ die n Matrizen $(\mathsf{A}^\iota_{1\varkappa,i}(x_0)), \ldots, (\mathsf{A}^\iota_{n\varkappa,i}(x_0))$ zu $\mathfrak{L}(f_i^*(x_0)) = \mathfrak{L}(K)$ gehören. Setzen wir $\mathring{\mathsf{A}}^\iota_{\varkappa\lambda} = \mathsf{A}^\iota_{\varkappa\lambda,i}(x_0)$, $\mathring{\Gamma}^\iota_{\varkappa\lambda} = \Gamma^\iota_{\varkappa\lambda,i}(x_0)$, so haben wir die verlangte Darstellung. Nun zur Eindeutigkeit derselben. Existiere die weitere Darstellung $\Lambda^\iota_{\varkappa\alpha} = \overline{\Gamma}^\iota_{\varkappa\alpha} + \overline{\mathsf{A}}^\iota_{\varkappa\alpha}$. Mit $[\Gamma^\iota_{\varkappa\alpha}] = \overline{\Gamma}^\iota_{\varkappa\alpha} - \mathring{\Gamma}^\iota_{\varkappa\alpha}$, $[\mathsf{A}^\iota_{\varkappa\alpha}] = \overline{\mathsf{A}}^\iota_{\varkappa\alpha} - \mathring{\mathsf{A}}^\iota_{\varkappa\alpha}$ gilt dann $[\Gamma^\iota_{\varkappa\alpha}] = -[\mathsf{A}^\iota_{\varkappa\alpha}]$, also $[\mathsf{A}^\iota_{\varkappa\alpha}] = [\mathsf{A}^\iota_{\alpha\varkappa}]$ für die n Matrizen $[\mathsf{A}^\iota_{1\varkappa}], \ldots, [\mathsf{A}^\iota_{n\varkappa}]$ aus $\mathfrak{L}(K)$. Nach Hilfssatz 2 existiert in einer Umgebung von x_0 eine mit f^* im engeren Sinne verträgliche symmetrische lineare Differentialform α vom adjungierten Typ mit $\alpha_i(x_0) = ([\mathsf{A}^\iota_{\varkappa\lambda}](dx_i^\varkappa)_{x_0})$. Nach 4. 1, Satz 4 ist dann $\Theta' + \alpha$ ein mit (f^*, Θ) verträglicher, hier überdies symmetrischer, Zusammenhang. Nach Voraussetzung über Q folgt $\alpha = 0$, also $[\mathsf{A}^\iota_{\varkappa\alpha}] = 0$ und damit die Eindeutigkeit.

Satz 2. *Die in Satz 1 für die Lie-Algebra $\mathfrak{L}(K)$ formulierte Eigenschaft ist gleichbedeutend mit den folgenden:*

I) *$\mathfrak{L}(K)$ hat die Dimension $r = \binom{n}{2}$.*

II) *Ist $\{(s^\iota_{1\varkappa}), \ldots, (s^\iota_{n\varkappa})\}$ ein System von n Matrizen aus $\mathfrak{L}(K)$ mit $s^\iota_{\varkappa\lambda} = s^\iota_{\lambda\varkappa}$, so folgt $s^\iota_{\varkappa\lambda} = 0$.*

Durch diesen evidenten Satz ist das Postulat (W) in Übereinstimmung mit dem Weylschen Ergebnis in [14], S. 49ff. vollständig algebraisiert. Es handelt sich von jetzt an um die Aufsuchung aller inäquivalenten reellen Lie-Algebren von Matrizen des Grades n, welche den Bedingungen I) und II) genügen. Wir beschließen den § 5 mit der Erledigung dieser Aufgabe für $n = 2$. Man sieht ohne weiteres, daß I) und II) in diesem Falle besagen, daß es sich um die Aufsuchung aller inäquivalenten 1-dimensionalen Lie-Algebren von 2-reihigen Matrizen mit von 0 verschiedener Determinante handelt. Klassifiziert man in bekannter Weise die Matrizen nach ihren Eigenwerten, so erhält man die Normalformen 1) bis 4) des Hauptsatzes.

§ 6. Übertragung ins Komplexe.

6. 1. In § 6 verwenden wir durchgehend die folgenden Bezeichnungen: K ist ein beliebiger Körper, R bzw. C der Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen. $L(n, K)$ ist eine Lie-Algebra von Matrizen des Grades n mit Koeffizienten aus K. Ist ferner γ eine symmetrische Matrix vom Grade n mit Koeffizienten aus K, so sei $L(n, K; \gamma)$ die Gesamtheit der Matrizen σ vom Grade n mit Koeffizienten aus K, für die

$$\gamma\sigma + {}^t\sigma\gamma = 0 \tag{1}$$

(${}^t\sigma$ = Transponierte von σ) gilt.

In § 5 haben wir durch die Sätze 1 und 2 erkannt, daß das Postulat (W) gleichbedeutend mit zwei Forderungen an eine Lie-Algebra $L(n, R)$ ist. Aus Gründen, die so-

gleich einsichtig werden, formulieren wir diese Forderungen jetzt nicht nur für R, sondern für einen beliebigen Grundkörper K. Dann lauten sie:

I) *$L(n, K)$ hat die Dimension $r = \binom{n}{2}$ über K.*

II) *Ist $\{(s^{\iota}_{1\varkappa}), \ldots, (s^{\iota}_{n\varkappa})\}$ ein System von n Matrizen aus $L(n, K)$ mit $s^{\iota}_{\lambda\varkappa} = s^{\iota}_{\varkappa\lambda}$, so folgt $s^{\iota}_{\varkappa\lambda} = 0$.*

Entsprechend dem Übergang vom Postulat (W) zu diesen beiden Forderungen verwandelt sich für $n \geqq 3$ die Aussage des Hauptsatzes aus § 5, wenn wir diese zugleich mit R auch für C als Grundkörper formulieren, in die folgende:

Hauptsatz. *Eine Lie-Algebra $L(n, R)$ bzw. $L(n, C)$ erfüllt für $n \geqq 3$ genau dann die Forderungen* I) *und* II) *bezüglich R bzw. C, wenn es eine reelle bzw. komplexe symmetrische Matrix γ vom Grade n mit* $\det(\gamma) \neq 0$ *gibt, so daß $L(n, R) = L(n, R; \gamma)$ bzw. $L(n, C) = L(n, C; \gamma)$ ist.*

In dieser Form ist der Satz von Weyl aufgestellt und ausführlich bewiesen worden ([12]; [14], S. 51—61, S. 86—112). Der Weylsche Beweis ist elementar und stützt sich ausschließlich auf die Normalformentheorie einer einzelnen Matrix. Ein gänzlich anderer Beweis wurde von Cartan angegeben ([4]). Dieser beruht auf der von Cartan entwickelten Struktur- und Darstellungstheorie der Lieschen Gruppen und ihrer Lie-Algebren ([1], [2], [3]). Cartan geht in der Analyse des Raumproblems sogar noch weiter als Weyl, indem er in dem Postulat (W) zunächst nur die Existenz eines verträglichen symmetrischen Zusammenhanges fordert, nicht auch dessen Eindeutigkeit. Ohne hierauf näher eingehen zu wollen, geben wir jetzt einen eigenen Beweis des obigen Hauptsatzes, indem wir uns an Cartans Ideen anlehnen.

Wir bemerken zunächst, daß die eine Richtung des Hauptsatzes für beliebige Grundkörper mit von 2 verschiedener Charakteristik gilt und trivial ist: $L(n, K; \gamma)$ hat stets die Dimension $\binom{n}{2}$, wie sofort aus (1) durch die Auflösung $\sigma = \gamma^{-1}\alpha$, ${}^t\alpha + \alpha = 0$ folgt. Ist ferner ein System $\{(s^{\iota}_{1\varkappa}), \ldots, (s^{\iota}_{n\varkappa})\}$ von Matrizen aus $L(n, K; \gamma)$ mit $s^{\iota}_{\lambda\varkappa} = s^{\iota}_{\varkappa\lambda}$ gegeben, so gilt mit $\gamma = (g_{\mu\nu})$ für die Matrizen $a_{\iota\varkappa,\lambda} = g_{\lambda\nu} s^{\nu}_{\lambda\varkappa}$ nach Definition $a_{\iota\varkappa,\lambda} + a_{\varkappa\iota,\lambda} = 0$ und nach Voraussetzung über das System der $s^{\iota}_{\varkappa\lambda}$ überdies $a_{\iota\lambda,\varkappa} = a_{\iota\varkappa,\lambda}$. Es folgt die bekannte Rechnung $0 = (a_{\iota\varkappa,\lambda} + a_{\varkappa\iota,\lambda}) - (a_{\varkappa\lambda,\iota} + a_{\lambda\varkappa,\iota}) + (a_{\lambda\iota,\varkappa} + a_{\iota\lambda,\varkappa}) = 2a_{\iota\varkappa,\lambda}$, also $a_{\iota\varkappa,\lambda} = 0$ und $s^{\iota}_{\varkappa\lambda} = 0$ bei von 2 verschiedener Charakteristik von K ([14], S. 86ff.).

Die andere Richtung des Hauptsatzes wird sowohl von Weyl als auch von Cartan zunächst für C als Grundkörper bewiesen. Auf die Gültigkeit für den Grunkdörper R wird sowohl von Weyl ([14], S. 87ff.) als auch von Cartan ([4], S. 191) auf eine Weise zurückgeschlossen, die uns völlig unzureichend vorkommt. Wir werden daher den § 6 einem einwandfreien Beweis der Tatsache widmen, daß aus der Gültigkeit des Hauptsatzes im Komplexen seine Gültigkeit im Reellen folgt.

6. 2. Wir machen vorweg noch einmal die Bemerkung, daß die Eigenschaften I) und II) einer Lie-Algebra $L(n, K)$ zugleich mit $L(n, K)$ auch allen zu $L(n, K)$ äquivalenten Lie-Algebren $L^*(n, K) = \tau L(n, K)\, \tau^{-1}$ zukommen. Es gilt zunächst der

Satz 1. *Für $n \geqq 3$ ist jede Lie-Algebra $L(n, K)$ mit den Eigenschaften* I) *und* II) *irreduzibel.*

Zum Beweis nehmen wir an, $L(n, K)$ wäre reduzibel. Wegen $n \geqq 3$ gibt es dann eine zu $L(n, K)$ äquivalente Lie-Algebra $L^*(n, K)$, deren Matrizen in mindestens zwei festen Feldern einer festen Zeile identisch verschwinden. Wir versuchen nun, n nicht sämtlich verschwindende Matrizen $\varrho_\mu = (r^{\nu}_{\lambda,\mu}) \in L^*(n, K)$ zu finden, für die $r^{\nu}_{\lambda,\mu} = r^{\nu}_{\mu,\lambda}$

gilt. Haben die ϱ_μ in bezug auf eine Basis $\sigma_k = (s^\mu_{\nu,k})$ von $L^*(n, K)$ die Darstellung $r^\mu_{\nu,\lambda} = \sum_k x^k_\lambda s^\mu_{\nu,k}$, so sind die x^k aus dem Gleichungssystem

$$(1) \qquad \sum_k x^k_\mu s^\nu_{\lambda,k} + \sum_k x^k(-s^\nu_{\mu,k}) = 0, \quad 1 \leqq \mu < \lambda \leqq n$$

zu bestimmen. (1) ist ein homogenes lineares Gleichungssystem von $n \cdot \binom{n}{2}$ Gleichungen für die ebensovielen Unbekannten x^k_λ. Die Reduzibilität von $L^*(n, K)$ besagt nun, daß es ein ν, ein μ und ein λ mit $\mu < \lambda$ gibt, so daß für alle $k = 1, \ldots, \binom{n}{2}$ die Gleichung $s^\nu_{\mu,k} = s^\nu_{\lambda,k} = 0$ gilt. Eine der Gleichungen (1) wäre damit identisch erfüllt und daher das System nicht-trivial lösbar, entgegen der Voraussetzung II.

Wir beweisen weiterhin einige Sätze über die durch 6. 1, (1) definierten Gesamtheiten $L(n, K; \gamma)$.

Satz 2. *$L(n, K; \gamma)$ ist eine Lie-Algebra der Dimension*

$$(2) \qquad r = \binom{n}{2} + \binom{n-p+1}{2}, \quad 0 \leqq p \leqq n,$$

wenn p der Rang von γ ist.

Zum Beweis transformiert man γ durch $\gamma^* = {}^t\tau^{-1}\gamma\tau^{-1}$ auf die durch p gegebene Kästchengestalt

$$(3) \qquad \gamma^* = \begin{pmatrix} \gamma^*_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der nicht-singulären Diagonalmatrix γ^*_p. Dann ist die allgemeine Matrix von $L(n, K; \gamma^*) = \tau L(n, K; \gamma)\,\tau^{-1}$ von der Form

$$(4) \qquad \sigma^* = \begin{pmatrix} \gamma^{*-1}_p & 0 \\ 0 & \varepsilon_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^*_p & 0 \\ \alpha^*_{n-p,p} & \alpha^*_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Darin ist ε_{n-p} die Einheitsmatrix, α^*_p eine beliebige alternierende Matrix, und $\alpha^*_{n-p,p}$, α^*_{n-p} sind völlig willkürliche Matrizen. Aus (4) folgt der Satz 2 nun ohne Schwierigkeit.

Satz 3. *$L(n, K; \gamma)$ ist genau dann irreduzibel, wenn γ den Rang n hat.*

Ist $L(n, K; \gamma)$ irreduzibel, so muß γ wegen (4) den Rang n haben. Ist letzteres der Fall, so hat $L(n, K; \gamma)$ die Eigenschaften I) und II) so, daß es nach Satz 1 irreduzibel ist.

Satz 4. *Sei ϱ eine beliebige Matrix mit Koeffizienten aus einem Körper K_2. Sind für alle alternierenden Matrizen α mit Koeffizienten aus einem beliebigen Unterkörper $K_1 \leqq K_2$ die Matrizen $\varrho\alpha$ wieder alternierend, so gibt es ein $v \in K_2$ so, daß $\varrho = v\varepsilon$ ist.*

Wir zeigen zuerst, daß ϱ Diagonalgestalt haben muß, also mit $\varrho = (v_{\mu\nu})$ für $\mu \neq \nu$ die Gleichung $v_{\mu\nu} = 0$ gilt. Sei $v_{\mu\nu}$ mit $\mu \neq \nu$ gegeben. Da $\varrho\alpha$ alternierend sein soll, ist für alle alternierenden $\alpha = (a_{\mu\nu})$ jedenfalls $\sum_\lambda v_{\mu\lambda} a_{\lambda\mu} = 0$ $(\mu = 1, \ldots, n)$, also auch für ein alternierendes α, für das $a_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\nu}$ für alle $\lambda = 1, \ldots, n$ gilt, welches sich wegen $\mu \neq \nu$ sicher finden läßt, und zwar bereits mit Koeffizienten aus K_1. So folgt $v_{\mu\nu} = 0$. Die Elemente in der Hauptdiagonale von ϱ seien v_μ. Dann gilt $\varrho\alpha = (v_\mu a_{\mu\nu})$. Wegen der Schiefsymmetrie von α folgt daraus $v_\mu a_{\mu\nu} = -v_\mu a_{\nu\mu}$, und wegen der Schiefsymmetrie von $\varrho\alpha$ gilt $v_\mu a_{\mu\nu} = -v_\nu a_{\nu\mu}$, woraus auf $v_\mu a_{\nu\mu} = v_\nu a_{\nu\mu}$ geschlossen wird. Bei gegebenem $\mu \neq \nu$ kann man $a_{\mu\nu} \neq 0$ wählen und kommt zu $v_\mu = v_\nu$.

Satz 5. *Seien K_i $(i = 1, 2)$ zwei Körper, $K_1 \leqq K_2$, γ_i zwei symmetrische Matrizen vom Grade n mit Koeffizienten aus K_i und gelte $L(n, K_1; \gamma_1) \leqq L(n, K_2; \gamma_2)$. Dann gibt es ein $v \in K_2$ so, daß $\gamma_2 = v\gamma_1$ ist.*

Wir transformieren $L(n, K_1; \gamma_1)$ in K_1 auf die Normalform (4), $L(n, K_1; \gamma_1^*)$, wobei $L(n, K_2; \gamma_2)$ in $L(n, K_2; \gamma_2^*)$ übergehe. Wegen $L(n, K_1; \gamma_1) \subseteq L(n, K_2; \gamma_2)$ muß $\gamma_2^* \sigma^*$ für alle $\sigma^* \in L(n, K_1; \gamma_1^*)$, also alle Matrizen der Form (4), alternierend sein. In dem Produkt auf der rechten Seite der Gleichung (4) bezeichnen wir die linke Matrix mit β^*, die rechte mit α^* und setzen $\varrho^* = \gamma_2^* \beta^*$, so daß also $\gamma_2^* \sigma^* = \varrho^* \alpha^*$ gilt. Dann muß $\varrho^* \alpha^*$ für alle α^* aus (4) alternierend sein. Es ist aber

$$\varrho^* \alpha^* = \begin{pmatrix} \varrho_p^* \alpha_p^* & + \varrho_{p,n-p}^* \alpha_{n-p,p}^*, & \varrho_{p,n-p}^* \alpha_{n-p}^* \\ \varrho_{n-p,p}^* \alpha_p^* & + \varrho_{n-p}^* \cdot \alpha_{n-p}^* \;, & \varrho_{n-p}^* \;\; \alpha_{n-p}^* \end{pmatrix}.$$

Setzt man 1) $\alpha_{n-p,p}^* = \alpha_{n-p}^* = 0$, so muß $\varrho_p^* \alpha_p^*$ für alle alternierenden α_p^* alternierend sein, was nach Satz 4 sofort $\varrho_p^* = v\varepsilon_p$ mit $v \in K_2$ zur Folge hat. Es ist ferner $\varrho_{n-p,p}^* \alpha_p^* = 0$ für alle alternierenden α_p^*, woraus $\varrho_{n-p,p}^* = 0$ folgt. Setzt man 2) $\alpha_p^* = \alpha_{n-p,p}^* = 0$, so muß $\varrho_{p,n-p}^* \alpha_{n-p}^*$ für alle α_{n-p}^* verschwinden, woraus $\varrho_{p,n-p}^* = 0$ folgt. Ferner ist dann $\varrho_{n-p}^* \alpha_{n-p}^*$ für alle α_{n-p}^* alternierend, also insbesondere für alle alternierenden α_{n-p}^*. Satz 4 liefert $\varrho_{n-p}^* = w\varepsilon_{n-p}$ mit $w \in K_2$. Setzt man aber noch $\alpha_{n-p}^* = \varepsilon_{n-p}$, so ist $\varrho_{n-p}^* \alpha_{n-p}^* = w\varepsilon_{n-p}$, also nur dann alternierend, wenn $w = 0$ ist, d. h. es folgt $\varrho_{n-p}^* = 0$. Also hat ϱ^* die Gestalt

$$\varrho^* = \begin{pmatrix} \gamma_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,p}^{*-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\varepsilon_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

woraus mit (3) sofort $\gamma_2^* = v\gamma_1^*$, also $\gamma_2 = v\gamma_1$ folgt.

Satz 6. *Ist in $L(n, C; \gamma)$ die Gesamtheit L der reellen Matrizen eine irreduzible Lie-Algebra $L(n, R)$ der Dimension $\binom{n}{2}$, so gibt es ein $v \in C$ so, daß $\gamma = v\gamma_1$ mit reeller Matrix γ_1 und $\det(\gamma_1) \neq 0$ ist.*

$L(n, C; \gamma)$ besteht aus allen Matrizen σ, für die $\gamma\sigma = \alpha$ alternierend ist. Wir setzen $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, γ_k, α_k reell und symmetrisch bzw. alternierend. Für alle $\varrho \in L$ gilt daher $\gamma_k \varrho = \alpha_k$, also $L \subseteq L(n, R; \gamma_k)$. Wir können offenbar annehmen, daß beide $\gamma_k \neq 0$ sind. Wäre nun der Rang von γ_k kleiner als n, so wäre $L(n, R; \gamma_k)$ nach Satz 3 reduzibel, also auch L, was nach Voraussetzung nicht geht. Daher haben beide γ_k den Rang n, und daher hat $L(n, R; \gamma_k)$ wegen Satz 2 die Dimension $\binom{n}{2}$, so daß $L = L(n, R; \gamma_k)$, also $L(n, R; \gamma_1) = L(n, R; \gamma_2)$ gilt. Mit Satz 5 für $K_1 = K_2 = R$ folgt $\gamma_2 = a\gamma_1$, $a \in R$, also die behauptete Darstellung $\gamma = (1 + ia)\,\gamma_1$ mit $\det(\gamma_1) \neq 0$.

Mit Satz 6 folgt nun unsere Behauptung, daß der Hauptsatz im Reellen gilt, wenn er im Komplexen richtig ist. Sei nämlich eine Lie-Algebra $L(n, R)$ mit den Eigenschaften I) und II) gegeben. Wir bilden die Gesamtheit aller Matrizen $\alpha + i\beta$, wobei α und β unabhängig voneinander ganz $L(n, R)$ durchlaufen mögen. Diese Gesamtheit ist dann offenbar eine Lie-Algebra $L(n, C)$ mit den Eigenschaften I) und II). Nach Voraussetzung ist sie gleich einer Lie-Algebra $L(n, C; \gamma)$, und nach Konstruktion ist die Gesamtheit der reellen Matrizen in ihr gerade $L(n, R)$, also nach Satz 1 eine irreduzible Lie-Algebra der Dimension $\binom{n}{2}$. Wegen Satz 6 ist daher $\gamma = v\gamma_1$ mit reeller, nicht-singulärer symmetrischer Matrix γ_1, woraus $L(n, R) = L(n, R; \gamma_1)$ folgt.

§ 7. Irreduzible Lie-Algebren.

Wir wenden uns nunmehr dem Beweis des Hauptsatzes im Komplexen zu und folgen der Idee von Cartan [4]. Diese besteht zunächst darin, die Forderungen I) und II) aus 6. 1 für eine Lie-Algebra $L(n, C)$ durch die folgende zu ersetzen:

(c) *$L(n, C)$ ist irreduzibel und hat die Dimension $\binom{n}{2}$.*

Hierdurch wird die der Darstellungstheorie fremde Eigenschaft II) durch die der Irreduzibilität ersetzt. Nach 6. 2, Satz 1 folgt (c) aus I) und II), ist also scheinbar schwächer als diese. Tatsächlich gilt aber der folgende

Hauptsatz. *Für $n \geqq 3$ erfüllt die Lie-Algebra $L(n, C)$ genau dann die Forderung* (c), *wenn es eine komplexe symmetrische Matrix γ vom Grade n mit* $\det(\gamma) \neq 0$ *gibt, so daß $L(n, C) = L(n, C; \gamma)$ ist.*

Die eine Richtung dieses Satzes ist mit 6. 2, Satz 3 für beliebige Grundkörper K mit von 2 verschiedener Charakteristik bewiesen. Zum Beweis der Umkehrung zeigen wir in § 7 zunächst eine Behauptung von Cartan, deren Begründung in [4] äußerst kurz ist, und die sich auch aus den in [4] zitierten Arbeiten von Cartan nicht mit Sicherheit entnehmen läßt:

Satz 1. *Eine irreduzible Lie-Algebra $L(n, C)$ vom Grade $n \neq 4$ und der Dimension $r \geqq \binom{n}{2}$ ist entweder einfach oder direkte Summe einer irreduziblen einfachen Lie-Algebra $L'(n, C)$ und der homothetischen Lie-Algebra, d. h. der 1-dimensionalen Lie-Algebra aller skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix.*

Dem Beweis von Satz 1 schicken wir einige Sätze voraus.

Satz 2. *Eine irreduzible Lie-Algebra $L(n, C)$ ist entweder halb-einfach oder direkte Summe einer irreduziblen halb-einfachen Lie-Algebra $L'(n, C)$ und der homothetischen Lie-Algebra.*

Auf Grund dieses von Cartan stammenden Satzes ([2], S. 147) haben wir zum Beweis von Satz 1 nur noch zu zeigen, daß jede halb-einfache irreduzible Lie-Algebra $L(n, C)$ vom Grade $n \neq 4$ und der Dimension $r \geqq \binom{n}{2} - 1$ einfach ist.

Satz 3. *Sei L eine Lie-Algebra von Endomorphismen eines Vektorraumes V über C, und sei L direkte Summe zweier Lie-Algebren $L_i \subseteq L$ $(i = 1, 2)$. Ist dann L_1 halb-einfach und ist V einfacher Darstellungsraum von L, so ist V direkte Summe endlich vieler operator-isomorpher einfacher Darstellungsräume R_λ von L_1, und die Darstellungen von L_1 auf R_λ sind treu.*

Zu L_1 gibt es einen einfachen Darstellungsraum $V_1 \subseteq V$ von L_1. Sei $V_1' \subseteq V$ die Summe aller zu V_1 operator-isomorpher Darstellungsräume von L_1. Dann ist bekanntlich V_1' direkte Summe endlich vieler operator-isomorpher einfacher Darstellungsräume R_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ von L_1 (siehe z. B. [9], S. 174, Prop. 1). Da L_1 halb-einfach ist, gibt es — wenn nicht schon $V_1' = V$ ist — nach dem Satz der vollen Reduzibilität für die Darstellungen halb-einfacher Lie-Algebren ([16], III, S. 381) neben den R_λ noch weitere einfache Darstellungsräume $S_\mu (\mu = 1, \ldots, m)$ von L_1, so daß $V = \sum_\lambda R_\lambda + \sum_\mu S_\mu$ als direkte Summe gilt. Aber nach der Voraussetzung über V_1' ist kein S_μ mit einem R_λ operator-isomorph. Wir legen durch alle R_λ, S_μ eine Basis für V und stellen die Elemente von L_1 und L_2 durch Matrizen dar. Nach Wahl der Basis sind die L_1 darstellenden Matrizen von der Form

$$(1) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \alpha_l & & & \\ \hline & & & \beta_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \beta_n \end{array}\right).$$

Die L_2 darstellenden Matrizen haben die Gestalt

$$(2) \qquad \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right).$$

Um dies einzusehen, nehme man an, es gäbe eine Darstellungsmatrix ξ von L_2, die nicht die Gestalt (2) hat. Schreibt man sich dieses ξ nach dem durch (1) gegebenen Kästchenschema auf, so gäbe es einen Ausschnitt $\xi_{l+\mu,\lambda} \neq 0$. Da nach Voraussetzung ξ mit allen Matrizen (1) vertauschbar ist, gilt

$$\beta_\mu \xi_{l+\mu,\lambda} = \xi_{l+\mu,\lambda} \alpha_\lambda \tag{3}$$

identisch in α_λ und β_μ. Aus der Irreduzibilität der beiden Darstellungen α_λ und β_μ folgt wegen (3) mit dem Schurschen Lemma ihre Äquivalenz und damit ein Widerspruch, da nach Konstruktion von V_1' kein α_λ zu einem β_μ äquivalent sein kann. Also gilt (2). Dies bedeutet, daß neben L_1 auch L_2 und damit L den Raum V_1' invariant läßt, woraus $V_1' = V$ folgt. In (1) treten dann nur die α_λ auf. Da diese als Darstellungen von L_1 alle äquivalent sind, ist jede von ihnen treu.

Satz 4. *Sei die irreduzible Lie-Algebra $L = L(n, C)$ direkte Summe nicht-abelscher halb-einfacher Lie-Algebren $L_i \leqq L$ $(i = 1, \ldots, m)$. Dann gibt es zu jedem L_i eine irreduzible treue Darstellung vom Grade $n_i \geqq 2$, so daß $\prod_i n_i = n$ ist.*

Offenbar genügt es, diesen Satz für $m = 2$ zu beweisen. Sei A (bzw. A_i) die von L (bzw. L_i) und der Einheitsmatrix erzeugte assoziative Algebra von Matrizen des Grades n. Mit L ist auch $A \leqq L$ irreduzibel und daher nach dem Satz von Burnside der volle Matrizenring der Dimension n^2. Wegen der direkten Summendarstellung $L = L_1 + L_2$ sind alle Elemente von A_1 mit allen von A_2 vertauschbar, und A wird von A_1 und A_2 erzeugt. Daher ist A das homomorphe Bild des tensoriellen Produktes $A_1 \otimes A_2$ bei dem kanonischen Homomorphismus von $A_1 \otimes A_2$ in A. Sei nun V ein n-dimensionaler einfacher Darstellungsraum von L. Nach Satz 3 ist V direkte Summe endlich vieler operatorisomorpher n_i-dimensionaler einfacher Darstellungsräume $R_{\lambda,i} \leqq V$ von L_i mit treuen Darstellungen von L_i auf $R_{\lambda,i}$. Dasselbe gilt mit denselben Räumen daher auch für die A_i. Wegen $L_i \leqq A_i$ ist — wieder nach dem Satz von Burnside — A_i voller Matrizenring der Dimension n_i^2, und da L_i nicht-abelsch ist, gilt $n_i \geqq 2$. Es folgt, daß A_i, also auch $A_1 \otimes A_2$ einfach ist. Daher ist A zu $A_1 \otimes A_2$ isomorph, hat also die Dimension $n^2 = n_1^2 n_2^2$, woraus $n = n_1 n_2$ folgt*).

Nun zum Beweis von Satz 1. Sei die halb-einfache irreduzible Lie-Algebra $L(n, C)$ gegeben. Nach Cartan ([1], S. 53) ist jede halb-einfache Lie-Algebra über C direkte Summe von endlich vielen einfachen nicht-abelschen Lie-Algebren. Wir können also auf die Cartansche Zerlegung von $L(n, C)$ den Satz 4 anwenden. Ist n eine Primzahl, so folgt die Einfachheit von $L(n, C)$ ohne weitere Voraussetzung. Damit sind jedenfalls die Fälle $n = 2, 3$ erledigt, und wir können $n > 4$ voraussetzen. Nehmen wir an, $L(n, C)$ wäre nicht einfach, also $m \geqq 2$. Nach Satz 4 existieren m treue Darstellungen L_i^* der L_i vom Grade $n_i \geqq 2$ mit $\prod_i n_i = n$ und $\dim(L_i^*) = \dim(L_i)$. Die L_i sind einfach, so daß $\dim(L_i^*) \leqq n_i^2 - 1$ gilt. Nun hat Cartan in [4] die für natürliche $m \geqq 2$, $n_i \geqq 2 (i = 1, \ldots, m)$ und $\prod_i n_i > 4$ gültige Ungleichung

$$\sum_i n_i^2 < \binom{\prod_i n_i}{2} \tag{4}$$

angegeben, aus der man sofort die weitere Ungleichung

$$\sum_i (n_i^2 - 1) < \binom{\prod_i n_i}{2} - 1 \tag{5}$$

*) Diesen Beweis verdanke ich einer Mitteilung von Herrn *Chevalley*, New York.

entnimmt. Mit (5) können wir die Dimension von L folgendermaßen abschätzen:

$$\dim(L) = \sum_i \dim(L_i) = \sum_i \dim(L_i^*)$$
$$\leqq \sum_i (n_i^2 - 1) < \binom{n}{2} - 1.$$

Setzt man also $\dim(L) \geqq \binom{n}{2} - 1$ voraus, so gerät man mit der Annahme $m \geqq 2$ in einen Widerspruch: Es gilt $m = 1$, d. h. L ist einfach und der Satz 1 bewiesen.

§ 8. Einfache irreduzible Lie-Algebren.

In § 7 wurde durch den Satz 1 die zum Beweis des dortigen Hauptsatzes nötige Aufsuchung aller inäquivalenten irreduziblen Lie-Algebren $L(N, C)$ der Dimension $\binom{N}{2}$ zurückgeführt auf die Aufsuchung aller einfachen irreduziblen Lie-Algebren $L(N, C)$ der Dimension $\binom{N}{2}$ oder $\binom{N}{2} - 1$, $N \neq 4$ vorausgesetzt. Zur Lösung der verbleibenden Aufgabe — bei der wir teils Cartans Vorgang in [4] folgen, teils von diesem abweichen — können wir daher die von Cartan ([1], [3]) und Weyl ([16]) entwickelte Struktur- und Darstellungstheorie der einfachen Lie-Algebren über C heranziehen.

8. 1. Nach Cartan ([1], S. 94) gehört jede einfache Lie-Algebra L über C einem der folgenden Typen an, die wir hier nur hinsichtlich ihrer Dimension aufführen:

$$\begin{aligned}
&A_n) \text{ von der Dimension } n(n+2), && n \geqq 1,\\
&B_n) \text{ von der Dimension } \binom{2n+1}{2}, && n \geqq 2,\\
&C_n) \text{ von der Dimension } \binom{2n+1}{2}, && n \geqq 3,\\
(1)\qquad &D_n) \text{ von der Dimension } \binom{2n}{2}, && n \geqq 4,\\
&E_6) \text{ von der Dimension } 78,\\
&E_7) \text{ von der Dimension } 133,\\
&E_8) \text{ von der Dimension } 248,\\
&F_4) \text{ von der Dimension } 52,\\
&G_2) \text{ von der Dimension } 14.
\end{aligned}$$

Man sieht dieser Tabelle ohne weiteres an, daß wir uns weiterhin im Falle der Dimension $\binom{N}{2}$ nur noch für die Typen A_n bis D_n und E_6, im Falle der Dimension $\binom{N}{2} - 1$ sogar nur noch für die Typen A_n und G_2 zu interessieren brauchen, da die Dimensionen der anderen Typen nicht von der Form $\binom{N}{2}$, $\binom{N}{2} - 1$ sind.

8. 2. In [1], S. 134ff. hat Cartan die irreduziblen Darstellungen kleinsten Grades aller einfachen Lie-Algebren über C bestimmt und das Ergebnis auf S. 147 formuliert. Danach sind diese Darstellungen für die Typen B_n, D_n bis auf äquivalente durch die Lie-Algebren der vollen komplex-orthogonalen Gruppen gegeben, also durch die im Hauptsatz behaupteten Lie-Algebren, oder sie gehören auch einem der Typen A_n, C_n an. Ferner sind die irreduziblen Darstellungen kleinsten Grades des Typs G_2 vom Grade 7, die des Typs E_6 vom Grade 27. Diese letzteren Fälle scheiden also überhaupt aus, da die

fraglichen Grade für G_2 wegen $\binom{6}{2} - 1 = 14$ und für E_6 wegen $\binom{13}{2} = 78$ nur $6 < 7$ und $13 < 27$ sein konnten. Aber auch die Typen B_n und D_n können wir als erledigt betrachten: Ist irgendeine irreduzible Darstellung vom Grade N und der Dimension r dieser Typen gegeben, so gilt sicher $\binom{N}{2} \geqq r$, da für die Darstellungen kleinsten Grades $\binom{N}{2} = r$ ist und diese gerade die des Hauptsatzes sind. Wo aber obiges Ergebnis nicht gilt, sind die Lie-Algebren auch vom Typ A_n oder C_n, die mithin allein zur weiteren Diskussion stehen. (Dies ist die Schlußweise von Cartan in [4] zur Ausscheidung der Typen B_n, D_n, G_2, E_6.)

8. 3. Zur Behandlung der noch verbleibenden Fälle A_n, C_n weichen wir von Cartans Beweisführung ab und knüpfen an Ergebnisse von Weyl [16] an. Danach ist der Grad der allgemeinsten irreduziblen Darstellung einer Lie-Algebra vom Typ A_n oder C_n durch folgende Formeln gegeben ([16], I, S. 299, II, S. 342): Definieren wir allgemein die Funktionen

$$(1)\qquad \begin{gathered} F(q_1, \ldots, q_n) = \prod_{i=1}^{n} q_i, \quad D(q_1, \ldots, q_n) = \prod_{i<k} (q_i - q_k), \\ S(q_1, \ldots, q_n) = \prod_{i<k} (q_i + q_k), \end{gathered}$$

so ist mit $s_i = r_i + m_i$, $r_i = n - i + 1$ die Gradformel für A_n

$$(2)\qquad N_A(m_1, \ldots, m_n) = \frac{F(s_1, \ldots, s_n)}{F(r_1, \ldots, r_n)} \cdot \frac{D(s_1, \ldots, s_n)}{D(r_1, \ldots, r_n)}$$

und für C_n

$$(3)\qquad N_C(m_1, \ldots, m_n) = N_A(m_1, \ldots, m_n) \cdot \frac{S(s_1, \ldots, s_n)}{S(r_1, \ldots, r_n)}$$

für alle m_i mit $m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots \geqq m_n \geqq 0$, $m_1 \geqq 1$, m_i ganz. Die Behandlung dieser Formeln vereinfacht sich, wenn wir die Transformation $p_i = m_i - m_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $p_n = m_n$ durchführen (vgl. [16], I, S. 285, II, S. 335). Durch diese Transformation gehen die Gradformeln (2) und (3) in die Formeln

$$(2')\qquad \begin{aligned} N_A(p_1, \ldots, p_n) = {} & \prod_{i=1}^{n} (p_i + 1) \\ & \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{p_i + p_{i+1}}{2}\right) + 1 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \left(\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n} + 1\right), \end{aligned}$$

$$(3')\qquad \begin{aligned} N_C(p_1, \ldots, p_n) &= N_A(p_1, \ldots, p_n)\ R_C(p_1, \ldots, p_n), \\ R_C(p_1, \ldots, p_n) &= \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{(p_i + \cdots + p_{n-1}) + 2p_n}{n + 2 - i} + 1\right) \\ & \prod_{i=1}^{n-2} \left(\frac{(p_i + \cdots + p_{n-2}) + 2(p_{n-1} + p_n)}{n + 3 - i} + 1\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \left(\frac{p_1 + 2(p_2 + \cdots p_n)}{2n - 1} + 1\right) \end{aligned}$$

über, während die neuen Nebenbedingungen für die p_i durch p_i ganz, $p_i \geqq 0$, $\sum_i p_i \geqq 1$ gegeben sind. Beide Behauptungen ergeben sich durch einfache Umrechnungen. Ohne weiteres folgt aus (3′) ferner die Ungleichung

$$N_C(p_1, \ldots, p_n) \geqq N_A(p_1, \ldots, p_n) \tag{4}$$

identisch in den p_i. Wir machen die Fallunterscheidung

$$\text{I)}\ p_k = 1 \text{ für ein } k, \quad p_i = 0 \text{ für } i \neq k, \qquad \text{II)}\ \sum_i p_i \geqq 2.$$

I) Bezeichnen wir mit $N_A(1_k)$ die Funktion $N_A(p_1, \ldots, p_n)$ für $p_k = 1$ und $p_i = 0$ für $i \neq k$, so gilt

$$N_A(1_k) = \binom{n+1}{k}, \tag{5}$$

wie man aus (2′) leicht errechnet. Ferner gelten die einfach zu beweisenden Abschätzungen

$$\left(\binom{n+1}{k}\right)_2 < n(n+2) \text{ für } n \geqq 1 \text{ und } k = 1, n \tag{6}$$

$$\left(\binom{n+1}{k}\right)_2 - 1 > n(n+2) \text{ für } n \geqq 4 \text{ und } 1 < k < n. \tag{7}$$

Im Falle der Typen A_n erledigen sich wegen (5) bis (7) und 8. 1, (1) alle Möglichkeiten außer $n = 3$, $k = 2$. Tatsächlich ist hier

$$N_A(0, 1, 0) = 6, \quad \binom{6}{2} = 3(3+2).$$

Es liegt also eine der gesuchten Darstellungen vor. Sie wird realisiert durch die bekannte Darstellung der speziellen linearen Gruppe vom Grade 4 durch die spezielle orthogonale Gruppe vom Grade 6 ([1], S. 147, $n = 6$). Wir sind also mit der Behauptung des Hauptsatzes aus § 7 in Einklang. Im Falle der Typen C_n werden wegen (4) und 8. 1, (1) durch (5) die Möglichkeiten $n \geqq 4$, $1 < k < n$ ausgeschieden; denn bei diesen ist $\binom{n+1}{k} > 2n+1$. Für $n = 3$, $k = 2$ berechnet man direkt $N_C(0, 1, 0) = 14 \neq 2 \cdot 3 + 1$. Der Fall ist also auch keiner der gesuchten. Weiter gilt mit der bereits für $N_A(p_1, \ldots, p_n)$ eingeführten Bezeichnung

$$N_C(1_1) = 2n < 2n + 1,$$

$$N_C(1_n) = (n+1)\binom{2(n+1)}{n} > 2n + 1,$$

womit auch die übrigen Möglichkeiten $k = 1$, $n \geqq 3$ von C_n für uns ausfallen.

II) Hier führt eine Eigenschaft der Funktion $N_A(p_1, \ldots, p_n)$ zum Ziel. Es gilt nämlich für $n \geqq 2$, $\sum_i p_i \geqq 2$

$$N_A(p_1, \ldots, p_n) \geqq \binom{n+2}{2}. \tag{8}$$

Zum Beweis führen wir die folgenden Eigenschaften von N_A auf, die alle leicht einzusehen sind:

1) $N_A(p_1, p_2, \ldots, p_n) = N_A(p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1)$,
2) $N_A(p_1, \ldots, p_n) \geqq N_A(q_1, \ldots, q_n)$ für $p_i \geqq q_i$,
3) $N_A(p_i, p_k) \geqq N_A(p_1, p_n)$, wobei allgemein $N_A(p_i, p_k) = N_A(0, \ldots, p_i, 0, \ldots, p_k, 0, \ldots)$ gesetzt ist.

Ist nun eines der $p_k \geqq 2$, so gilt in bereits eingeführter Bezeichnung

$$N_A(p_1, \ldots, p_n) \geqq N_A(2_k) \geqq N_A(2_1).$$

Ist dagegen $p_i = p_k = 1$, $i < k$, so haben wir

$$N_A(p_1, \ldots, p_n) \geqq N_A(1_i, 1_k) \geqq N_A(1_1, 1_n).$$

Es ist aber

$$N_A(2_1) = \binom{n+2}{2}, \quad N_A(1_1, 1_n) = n(n+2) \geqq \binom{n+2}{2},$$

also folgt (8).

Die Typen A_n: Für $n = 1$ ist $N_A(p_1) = p_1 + 1$, und wegen 8. 1, (1) die Dimension $= 3$. Der einzige der gesuchten Fälle tritt daher für $p_1 = 2$ ein:

$$N_A(2) = 3, \quad \binom{3}{2} = 1(2+1).$$

Er entspricht der bekannten Isomorphie der speziellen linearen Gruppe vom Grade 2 mit der speziellen orthogonalen Gruppe vom Grade 3 ([1], S. 147, $n = 3$), was wieder die Behauptung des Hauptsatzes bestätigt. Für $n \geqq 2$ gilt

$$\left(\binom{n+2}{2}\right) - 1 > n(n+2).$$

Wegen (8) sind damit die Fälle A_n erledigt. Die Typen C_n kommen aber wegen (4) und (8), sowie $\binom{n+2}{2} > 2n + 1$ nicht in Frage.

8. 4. Der Hauptsatz in § 7 wäre damit bewiesen, wenn wir noch den bisher ausgenommenen Fall $N = 4$ mit Erfolg behandeln können. Wegen § 7, Satz 2 hat man die halb-einfachen Lie-Algebren der Dimension 5 und 6 aufzusuchen. Im ersteren Falle kann bei der Cartanschen Zerlegung in einfache Lie-Algebren nur der Fall $5 = 2 + 3$ hinsichtlich der Dimensionen auftreten. Die Dimension 2 kommt aber in 8. 1, (1) nicht vor. Daher kommt im Falle der Dimension 6 nur die Zerlegung $6 = 3 + 3$ in Frage: Man hat noch alle halb-einfachen irreduziblen Lie-Algebren $L(4, C)$ von der Dimension 6 zu finden, die bei der Cartanschen Zerlegung in zwei Lie-Algebren vom Typ A_1 zerfallen. Offenbar sind diese alle zueinander isomorph, und unter ihnen befinden sich die Lie-Algebren der vollen komplex-orthogonalen Gruppen vom Grade 4, deren sämtliche irreduzible Darstellungen vom Grade 4 und der Dimension 6 daher zu bestimmen sind. Der Grad der allgemeinsten irreduziblen Darstellung der komplex-orthogonalen Gruppe vom Grade 4 ist nach Weyl ([16], II, S. 349)

$N(m_1, m_2) = (m_1 + m_2 + 1)\,(m_1 - m_2 + 1)$, $\quad m_1 + m_2 \geqq 0$, $m_1 - m_2 \geqq 0$, beide ganz.

Die Bedingung $N(m_1, m_2) = 4$ zieht sofort die einzigen Möglichkeiten

$$m_1 = \frac{3}{2},\ m_2 = -\frac{3}{2};\quad m_1 = m_2 = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad m_1 = 1,\ m_2 = 0$$

nach sich. Die beiden ersten liefern die Homomorphismen der komplex-orthogonalen Gruppe auf ihre einfachen Komponenten der Dimension 3 in der Cartanschen Zerlegung, der dritte den identischen Automorphismus dieser Gruppe.

Literatur.

(Die mit einem * versehenen Arbeiten sind dem Weylschen Raumproblem gewidmet.)

[1] *E. Cartan*, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Paris 1894.

[2] *E. Cartan*, Les groupes de transformations continus, infinis, simples. Ann. Ec. Norm. sup., 3e sér., **26** (1909), 93—161.

[3] *E. Cartan*, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. Bull. Soc. Math. France, **41** (1913), 53—96.

[4]* *E. Cartan*, Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique. C. R. Acad. Sc. Paris **175** (1922), 82—85; Journ. d. Math. p. et a. (IX), **2** (1923), 167—192.

[5] *E. Cartan*, Sur les variétés à connexion affine. Ann. Ec. Norm. sup., 3e sér., **40** (1923), 325—412; **41** (1924), 1—25; **42** (1925), 17—88.

[6] *E. Cartan*, Les récentes généralisations de la notion d'espace. Bull. Sc. Math., 2e sér., **48** (1924), 294—320.

[7] *E. Cartan*, Les groupes d'holonomie des espaces généralisés. Acta math. **48** (1926), 1—42.

[8] *S. S. Chern*, Differentialgeometry of fibre bundles. Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass. (USA) **2** (1950), 397—411.

[9] *C. Chevalley*, Theory of Lie Groups I. Princeton 1946.

[10] *Ch. Ehresmann*, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Coll. detopologie (espaces fibrés) Bruxelles 1950.

[11] *N. Steenrod*, The Topology of Fibre Bundles. Princeton 1951.

[12]* *H. Weyl*, Die Einzigartigkeit der pythagoreischen Maßbestimmung. Math. Zeitschr. **12** (1922), 114—146.

[13]* *H. Weyl*, Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe. Math. Zeitschr. **17** (1923), 293—320.

[14]* *H. Weyl*, Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin 1923.

[15] *H. Weyl*, Raum, Zeit, Materie. 5. Aufl., Berlin 1923.

[16] *H. Weyl*, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I: Math. Zeitschr. **23** (1925), 271—309; II: Math. Zeitschr. **24** (1926), 328—376; III: ib. 377—395; Nachtrag ib. 789—791.

Eingegangen 25. November 1955.

Wesentliche Komponenten bei Gitterpunktmengen.

Von *Friedrich Kasch* in Mainz.

Fragestellung.

Für Dichteuntersuchungen in der additiven Zahlentheorie ist bekanntlich der folgende Zusammenhang von Bedeutung: *Jede die Null enthaltende Menge nichtnegativer ganzer Zahlen positiver Dichte bildet eine Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen, und jede die 0 enthaltende Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen stellt eine wesentliche Komponente dar.* Im ersten Teil dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß der entsprechende Zusammenhang bei sinngemäßer Verallgemeinerung der dabei benutzten Begriffe auch bei Mengen „nichtnegativer" Gitterpunkte aus einem endlichdimensionalen Raum gültig ist. Dabei sei ein nichtnegativer Gitterpunkt ein Punkt mit lauter nichtnegativen ganzrationalen Koordinaten. Die eigentliche Schwierigkeit beim Beweis betrifft die zweite Behauptung; hingegen kann die erste fast unmittelbar auf den linearen Fall zurückgeführt werden.

Bei den Definitionen und beim Beweis schließen wir an eine kürzlich erschienene Arbeit [4] an, in der eine unmittelbare Verallgemeinerung einer Schlußweise von P. Erdös und E. Landau [6] zur Abschätzung der Dichte einer Summenmenge auf Gitterpunktmengen enthalten ist.

Im zweiten Teil dieser Arbeit soll für Gitterpunktmengen der Ebene eine Verallgemeinerung der Schnirelmannschen Ungleichung

$$\gamma \geqq \alpha + \beta - \alpha\beta = \alpha + (1 - \alpha)\,\beta$$

hergeleitet werden, nämlich die Abschätzung

$$\gamma \geqq \alpha + \frac{\alpha}{2}\,(1 - \alpha)\,\beta. \tag{1}$$

Dabei seien α bzw. β die Dichten beliebiger Mengen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ mit $0 \in \mathfrak{B}$ und γ die Dichte der Summenmenge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Aus (1) folgt erneut die in dem vorhergehenden Ergebnis enthaltene Tatsache, daß eine die 0 enthaltende Gitterpunktmenge der Ebene positiver Dichte eine wesentliche Komponente ist. Ob die formal genaue Verallgemeinerung der Schnirelmannschen Ungleichung in der Ebene richtig ist, kann hier nicht entschieden werden. Nach L. Cheo [2] ist lediglich bekannt, daß dies dann der Fall ist, wenn alle ganzzahligen Punkte einer der positiven Halbachsen zur fraglichen Menge gehören; unter dieser sehr einschränkenden Voraussetzung läßt sich der lineare Beweis fast unmittelbar übertragen. Jedenfalls ist eine genaue Verallgemeinerung des Satzes von H. B. Mann, d. h. der Abschätzung

$$\gamma \geqq \operatorname{Min}(1, \alpha + \beta)$$

auf die Ebene nicht möglich, wie L. Cheo [2] durch Angabe eines Gegenbeispiels gezeigt hat.

Auch der hier mitgeteilte Beweis von (1) bedeutet eine Zurückführung auf lineare Eigenschaften; dies hat, wie sich aus dem Beweis ergibt, zur Folge, daß er sich nicht

auf höhere Dimensionen übertragen läßt. Die Schnirelmannsche Ungleichung und die Abschätzung (1) legen jedoch die Vermutung nahe, daß in einem r-dimensionalen Raum zumindest die Abschätzung

$$\gamma \geqq \alpha + \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{r-1} (1 - \alpha)\, \beta$$

richtig ist.

I. Teil.

1. Unter *Gitterpunkten* des r-dimensionalen Raums verstehen wir r-Tupel von ganzrationalen Zahlen[1]). Wir bezeichnen sie mit kleinen deutschen Buchstaben oder durch Angabe ihres Komponentenvektors, d. h. in der Form

$$\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r) \qquad (n_i \text{ ganz}, \; i = 1, \ldots, r).$$

Gilt dabei $n_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, r)$, so nennen wir $\mathfrak{n}$ einen *nichtnegativen Gitterpunkt*; die von $0 = (0, \ldots, 0)$ verschiedenen nichtnegativen Gitterpunkte sollen *natürliche Gitterpunkte* heißen. Die Menge aller nichtnegativen Gitterpunkte bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}$ und die aller natürlichen Gitterpunkte mit $\mathfrak{N}$.

Ist $\mathfrak{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ ein Gitterpunkt mit $m_i \leqq n_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, so schreiben wir zur Abkürzung $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$. Wir merken an, daß bei dieser Größenbeziehung die Menge der nichtnegativen Gitterpunkte eine teilweise geordnete Halbgruppe bildet.

Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge nichtnegativer Gitterpunkte, so verstehen wir unter $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ mit $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}$ die Menge aller $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{n}$. Die Anzahlfunktion $A(\mathfrak{n})$ von $\mathfrak{A}$ sei gleich der Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}) \cap \mathfrak{N}$. Die untere Grenze aller Quotienten $A(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{n})$ $(\mathfrak{n} \in \mathfrak{N})$ wird als (*finite*) *Dichte* α von $\mathfrak{A}$ bezeichnet:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname*{fin}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} = \alpha;$$

entsprechend sei

$$\text{(3)} \qquad \lim_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} = \alpha^* \text{ [2])}$$

die *asymptotische Dichte* von $\mathfrak{A}$; es ist demnach $\alpha^* \geqq \alpha$. Aus $\alpha > 0$ folgt offenbar, daß die Einheitspunkte

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$$

in $\mathfrak{A}$ enthalten sind[3]).

2. Sei jetzt auch $\mathfrak{B}$ eine Menge nichtnegativer Gitterpunkte mit der Anzahlfunktion $B(\mathfrak{n})$ und der Dichte β, dann verstehen wir unter der Summenmenge

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

die Menge aller in der Gestalt

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_r + b_r)$$

mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ darstellbaren Gitterpunkte (Vektoraddition)[4]).

---

[1]) r betrachten wir im folgenden als fest.

[2]) d. h. α^* ist der kleinste Häufungspunkt der Menge $\left\{\frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})}\right\}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}}$.

[3]) Wie im linearen Fall gilt: Dann und nur dann ist $\alpha > 0$, wenn $\alpha^* > 0$ und die Einheitspunkte in $\mathfrak{A}$ enthalten sind. (Auch die in den weiteren Fußnoten erwähnten Ergebnisse sind für $r = 1$ wohlbekannt, siehe etwa [8]; die Beweise lassen sich für $r > 1$ analog führen.)

[4]) Gilt $0 \in \mathfrak{A}$, $0 \in \mathfrak{B}$ und $\alpha + \beta \geqq 1$, dann folgt $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{Z}$; gilt $0 \in \mathfrak{A}$, $0 \in \mathfrak{B}$ und $\alpha^* + \beta^* > 1$, dann folgt $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \sim \mathfrak{Z}$.

Wir setzen jetzt voraus, daß $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Menge nichtnegativer Gitterpunkte mit der Eigenschaft sei, daß sich jeder Gitterpunkt $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}$ in der Form

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{b}_1 + \cdots + \mathfrak{b}_{l(\mathfrak{n})} \qquad (\mathfrak{b}_i \in \mathfrak{B})$$

darstellen lasse. Sei $l(\mathfrak{n})$ in dieser Darstellung minimal, dann wird

$$\overline{\operatorname{fin}}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} l(\mathfrak{n}) = h, \quad \overline{\operatorname{fin}}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{1}{N(\mathfrak{n})} \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} l(\mathfrak{m}) = \lambda, \quad \overline{\lim}_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}} \frac{1}{N(n)} \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} l(\mathfrak{m}) = \lambda^*$$

gesetzt, und es werden h als *Ordnung*, λ als *mittlere Ordnung* und λ^* als *asymptotische mittlere Ordnung* bezeichnet. Ist h endlich, dann wird $\mathfrak{B}$ eine *Basis endlicher Ordnung* der natürlichen Gitterpunkte genannt; offenbar ist dann $\lambda \leqq h$ [5]). Analog zum linearen Fall gilt

Satz 1. *Jede die 0 enthaltende Gitterpunktmenge positiver Dichte ist eine Basis endlicher Ordnung der natürlichen Gitterpunkte* [6]).

Beweis. Die Menge $\mathfrak{B}$ besitze die Dichte $\beta > 0$. Sei $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ die Menge der Elemente aus $\mathfrak{B}$, bei denen höchstens die i-te Komponente von 0 verschieden ist, und sei $\mathfrak{B}_i'$ die Menge der Komponenten der Elemente aus $\mathfrak{B}_i$. Dann ist $\mathfrak{B}_i'$ eine die 0 enthaltende Menge nichtnegativer Zahlen, und aus der Definition der Dichte von $\mathfrak{B}$ folgt, daß $\mathfrak{B}_i'$ eine im üblichen Sinne positive Dichte $(\geqq \beta)$ besitzt. Dann ist bekanntlich $\mathfrak{B}_i'$ eine Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen. Sei h_i die Ordnung von $\mathfrak{B}_i'$, dann enthält offenbar mit $h = \sum_{i=1}^{r} h_i$ die h-fache Summe von $\mathfrak{B}$ die Menge $\mathfrak{N}$ der natürlichen Gitterpunkte.

Bemerkung: Beim Beweis wird nur benutzt, daß $\mathfrak{B}$ auf den positiven Halbachsen eine positive Dichte besitzt. Es genügt daher, nur dies in Satz 1 vorauszusetzen.

3. Eine Menge $\mathfrak{B}$ nichtnegativer Gitterpunkte heiße analog zum linearen Fall eine *wesentliche Komponente*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Für jede Menge $\mathfrak{A}$ nichtnegativer Gitterpunkte der Dichte α mit $0 < \alpha < 1$ ist die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ größer als α [7]). Die anfangs aufgestellte Behauptung, daß jede die 0 enthaltende Basis endlicher Ordnung eine wesentliche Komponente ist, ergibt sich dann unmittelbar aus

Satz 2. *Es gibt eine Zahl $c > 0$ so, daß für jede die 0 enthaltende Basis $\mathfrak{B}$ der mittleren Ordnung $\lambda < \infty$ und jede Menge nichtnegativer Gitterpunkte $\mathfrak{A}$ der Dichte α die Ungleichung*

$$\gamma \geqq \alpha\left(1 + c\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right) \tag{4}$$

besteht, wobei γ die Dichte der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist. Insbesondere kann

$$c = \{3(r+1)\}^{-r} \tag{5}$$

gewählt werden.

Beim Beweis stützen wir uns auf Ergebnisse aus [4], mit deren Hilfe dort die Abschätzung

$$\gamma \geqq \alpha\left(1 + \frac{1}{2^r}\,\frac{1 - 2^{r-1}\alpha}{\lambda}\right) \tag{6}$$

---

[5]) Darüber hinaus besteht dann die Ungleichung $\lambda^* \leqq \lambda \leqq h < 2\lambda$.

[6]) Ein entsprechender Satz wie im linearen Fall gilt auch für die asymptotischen Größen.

[7]) Aus dem folgenden Satz ergibt sich, daß die in [4] vorgenommene Einschränkung des Begriffs der wesentlichen Komponente nicht erforderlich ist.

bewiesen wurde. Diese hat im Gegensatz zu (4) nur für $\alpha < 2^{-(r-1)}$ eine Bedeutung; für hinreichend kleine α ist sie allerdings besser als (4), jedenfalls für das hier angegebene c[8]).

Beweis. Wir gehen von der Ungleichung (5. 6) aus [4] aus[9]):

$$(7)\quad \lambda N(\mathfrak{n})\,\{C(\mathfrak{n}) - A(\mathfrak{n})\} \geqq \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} A(\mathfrak{n}-\mathfrak{m}) - \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})} A(\mathfrak{a}) + A(\mathfrak{n}) = \sum_{\bar{\mathfrak{a}} \in \bar{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})} A(\bar{\mathfrak{a}});$$

dabei ist $\mathfrak{n}$ ein beliebiger natürlicher Gitterpunkt und $\bar{\mathfrak{A}}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{N}$. Nach Definition von α gilt $A(\mathfrak{m}) \geqq \alpha\, N(\mathfrak{m})$, daher folgt aus (7)

$$(8)\qquad \lambda N(\mathfrak{n})\,\{C(\mathfrak{n}) - A(\mathfrak{n})\} \geqq \alpha \sum_{\bar{\mathfrak{a}} \in \bar{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})} N(\bar{\mathfrak{a}}).$$

Um nun die rechts stehende Summe abzuschätzen, unterscheiden wir zwei Fälle.

Zunächst setzen wir voraus, daß mindestens eine der Komponenten von $\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ größer oder gleich $3(r+1)$ sei. Die Indizierung sei so, daß

$$n_i \geqq 3(r+1) \text{ für } i = 1, \ldots, k$$

und

$$n_i < 3(r+1) \text{ für } i = k+1, \ldots, r$$

gelte. Wir setzen

$$\begin{aligned} n_i' &= \left[\frac{n_i+1}{r+1}\right] - 1 \text{ für } i = 1, \ldots, k;\\ n_i' &= 0 \qquad\qquad\quad \text{für } i = k+1, \ldots, r;\\ \mathfrak{n}_i' &= (n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i', n_{i+1}, \ldots, n_r) \text{ für } i = 1, \ldots, k;\\ \mathfrak{n}' &= (n_1', \ldots, n_r'). \end{aligned}$$

Die Anzahl der Gitterpunkte $\bar{\mathfrak{a}} \in \bar{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})$ mit

$$(9)\qquad \mathfrak{n}' \leqq \bar{\mathfrak{a}} \leqq \mathfrak{n}$$

bezeichnen wir mit $\bar{A}(\mathfrak{n}', \mathfrak{n})$; dann gilt

$$\begin{aligned} (10)\quad \bar{A}(\mathfrak{n}', \mathfrak{n}) &\geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - \sum_{i=1}^{k} \bar{A}(\mathfrak{n}_i') \geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k} N(\mathfrak{n}_i')\\ &\geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha) \sum_{i=1}^{k} \left\{(n_1+1)\cdots(n_{i-1}+1)\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right](n_{i+1}+1)\cdots\right.\\ &\qquad\qquad \left.(n_r+1) - 1\right\}\\ &\geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha)\frac{k}{r+1}\left\{\prod_{i=1}^{r}(n_i+1) - 1\right\}\\ &= \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha)\frac{k}{r+1} N(\mathfrak{n}) \geqq \bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha)\frac{r}{r+1} N(\mathfrak{n}). \end{aligned}$$

Wir wollen nun $N(\bar{\mathfrak{a}})$ für die Gitterpunkte $\bar{\mathfrak{a}}$, die (9) genügen, abschätzen. Nach Definition von $\mathfrak{n}'$ gilt

$$\begin{aligned} (11)\quad N(\bar{\mathfrak{a}}) \geqq N(\mathfrak{n}') &= \prod_{i=1}^{k}\left[\frac{n_i+1}{r+1}\right] - 1 \geqq \frac{1}{(r+1)^k}\prod_{i=1}^{k}(n_i - r) - 1\\ &= \frac{1}{(r+1)^k}\prod_{i=1}^{k}\frac{n_i - r}{n_i+1}\prod_{i=1}^{k}(n_i+1) - 1 \geqq \frac{2^k}{3^k(r+1)^k}\prod_{i=1}^{k}(n_i+1) - 1\\ &\geqq \frac{1}{3^k(r+1)^k}\left\{\prod_{i=1}^{k}(n_i+1) - 1\right\}. \end{aligned}$$

---

[8]) Siehe dazu auch die Bemerkung im Anschluß an den Beweis. Im Falle $r = 1$ wurde eine Abschätzung dieser Art bekanntlich zuerst von *P. Erdös* angegeben [3].

[9]) Formel (5. 6) aus [4] lautet tatsächlich $\lambda N(\mathfrak{n})\{C(\mathfrak{n}) - A(\mathfrak{n})\} \geqq \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} A(\mathfrak{n}-\mathfrak{m}) - \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} E(\mathfrak{m})$; dabei ist $E(\mathfrak{m})$ definiert als Anzahl der verschiedenen Paare $\mathfrak{a}', \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ mit $\mathfrak{a}' - \mathfrak{a} = \mathfrak{m}$. Daraus folgt unmittelbar die Ungleichung (7).

Wegen $n_i \leqq 3(r+1)-1$ für $i = k+1, \ldots, r$ gilt ferner

$$\prod_{i=1}^{k}(n_i+1)-1 \geqq \frac{1}{3^{r-k+1}(r+1)^{r-k}}\left\{\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)-1\right\};$$

damit erhält man aus (11)

$$N(\bar{\mathfrak{a}}) \geqq \frac{1}{3^r(r+1)^{r-1}}\left\{\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)-1\right\} = \frac{N(\mathfrak{n})}{3^r(r+1)^{r-1}}. \tag{12}$$

Da für die (9) genügenden Gitterpunkte aus $\bar{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})$ die Anzahlen $N(\bar{\mathfrak{a}})$ in der in (8) rechts stehenden Summe $\sum_{\bar{\mathfrak{a}} \in \bar{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})} N(\bar{\mathfrak{a}})$ vorkommen, erhält man aus (10) und (12)

$$\sum_{\bar{\mathfrak{a}} \in \bar{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})} N(\bar{\mathfrak{a}}) \geqq \frac{1}{3^r(r+1)^{r-1}}\left\{\bar{A}(\mathfrak{n}) - (1-\alpha)\frac{r}{r+1}N(\mathfrak{n})\right\}N(\mathfrak{n}).$$

Damit folgt aus (8)

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} + c_1\frac{\alpha}{\lambda}\frac{\bar{A}(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} - c_2\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda},$$

wobei

$$c_1 = \frac{1}{3^r(r+1)^{r-1}} \quad \text{und} \quad c_2 = c_1\frac{r}{r+1}$$

gesetzt ist. Wegen $A(\mathfrak{n}) = N(\mathfrak{n}) - \bar{A}(\mathfrak{n})$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} &\geqq 1 - \left(1 - c_1\frac{\alpha}{\lambda}\right)\frac{\bar{A}(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} - c_2\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} \\ &\geqq 1 - \left(1 - c_1\frac{\alpha}{\lambda}\right)(1-\alpha) - c_2\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} \\ &= \alpha + (c_1 - c_2)\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} = \alpha\left(1 + c\frac{1-\alpha}{\lambda}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

wobei $c = c_1 - c_2 = \{3(r+1)\}^{-r}$ ist.

Wir hatten bisher vorausgesetzt, daß mindestens eine Komponente von $\mathfrak{n}$ größer oder gleich $3(r+1)$ sei. Jetzt wird der Fall betrachtet, daß alle Komponenten kleiner als $3(r+1)$ sind. Ist $A(\mathfrak{n}) = N(\mathfrak{n})$, so gilt

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} = \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} = 1 \geqq \alpha\left(1 + \frac{1-\alpha}{\lambda}\right),$$

d. h. unsere Behauptung ist mit $c = 1$ erfüllt. Ist jedoch $A(\mathfrak{n}) < N(\mathfrak{n})$, dann enthält $\mathfrak{C}(\mathfrak{n})$ mindestens einen Gitterpunkt mehr als $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$, da bereits durch Addition der in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Einheitspunkte zu $\mathfrak{A}$ mindestens ein neuer Punkt in $\mathfrak{C}(\mathfrak{n})$ entsteht. Es gilt dann also

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} + \frac{1}{N(\mathfrak{n})} \geqq \alpha + \frac{1}{N(\mathfrak{n})}. \tag{14}$$

Wegen $N(\mathfrak{n}) = \prod_{i=1}^{r}(n_i+1)-1 \leqq 3^r(r+1)^r$ folgt aus (14)

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \alpha + \{3(r+1)\}^{-r} \geqq \alpha\left(1 + c\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Die Ungleichung

$$\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \alpha\left(1 + c\frac{1-\alpha}{\lambda}\right) \quad \text{mit} \quad c = \{3(r+1)\}^{-r}$$

gilt also jetzt für jeden Punkt $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}$; daraus folgt dann sofort die Behauptung des Satzes.

Bemerkungen: 1. Wie man an Hand des Beweises feststellt, könnte man durch Verfeinerung der Abschätzungen die Konstante c noch vergrößern. Man überzeugt sich aber leicht, daß man auf dem hier eingeschlagenen Weg jedenfalls nicht über $c = (r+1)^{-r}$ hinauskommen wird. Die unmittelbare Übertragung der Schlußweise von Erdös-Landau auf den Raum, die in [4] durchgeführt wurde, liefert die Abschätzung (6), die für hinreichend kleine α besser als (4) ist. Es wäre wünschenswert, eine Schlußweise zu finden, die sogleich eine (4) und (6) enthaltende Abschätzung liefert.

2. Eine entsprechende Überlegung wie im Beweis von Satz 2 kann auch für die asymptotischen Größen durchgeführt werden und liefert die Abschätzung

$$\gamma^* \geqq \alpha^* \left(1 + c\,\frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right) \quad \text{mit} \quad c = \{3(r+1)\}^{-r}. \tag{15}$$

4. Aus Satz 2 folgt fast unmittelbar eine Abschätzung für die Dichte einer Summenmenge, wenn beide Summanden eine positive Dichte besitzen.

Satz 3. *Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen nichtnegativer Gitterpunkte mit den Dichten α bzw. β, und es sei $0 \in \mathfrak{B}$. Dann gilt für die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$*

$$\gamma \geqq \alpha \left(1 + \frac{c}{2r}(1-\alpha)\,\beta\right) \quad \text{mit} \quad c = \{3(r+1)\}^{-r}. \tag{16}$$

Beweis. Für $\beta = 0$ ist die Behauptung klar; sei also $\beta > 0$. Nach Satz 1 ist dann $\mathfrak{B}$ eine Basis endlicher Ordnung. Wir betrachten $\mathfrak{B}$ nur auf den positiven Halbachsen. Seien h die Ordnung von $\mathfrak{B}$, h_0 die Ordnung von $\mathfrak{B}$ auf der Halbachse maximaler Ordnung, und sei β_0 die Dichte auf dieser Halbachse. Für die mittlere Ordnung λ von $\mathfrak{B}$ gilt dann offenbar $\lambda \leqq h \leqq rh_0$. Zufolge des Satzes von H. B. Mann hat man ferner $rh_0 \leqq r\left(\frac{1}{\beta_0} + 1\right)$, also gilt $\lambda \leqq \frac{2r}{\beta_0} \leqq \frac{2r}{\beta}$; damit folgt (16) aus (4).

Aus (15) kann man eine analoge Abschätzung für die asymptotischen Größen herleiten, wobei man an Stelle des Satzes von H. B. Mann den Dichtesatz von M. Kneser[10]) heranzuziehen hat. Man erhält dann die folgende Aussage:

Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen nichtnegativer Gitterpunkte mit den asymptotischen Dichten α^* bzw. β^*, und es sei $0 \in \mathfrak{B}$. Bezeichnet man mit $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ die Menge der Punkte aus $\mathfrak{B}$, bei denen höchstens die i-te Komponente von Null verschieden ist, mit $\mathfrak{B}_i'$ die Menge der Komponenten von $\mathfrak{B}_i$, und ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen aus $\mathfrak{B}_i'$ $(i = 1, \ldots, r)$ gleich 1, dann gilt die Abschätzung

$$\gamma^* \geqq \alpha^* \left(1 + \frac{c}{2r}(1-\alpha^*)\,\beta^*\right) \quad \text{mit} \quad c = \{3(r+1)\}^{-r}. \tag{17}$$

5. Ohne im einzelnen darauf einzugehen, soll schließlich noch erwähnt werden, daß sich unsere bisherigen Überlegungen auf beliebige Punktmengen im r-dimensionalen Raum übertragen lassen, wenn dort die Begriffe wie Dichte, Basis usw. im Sinne von D. Raikov [7] und L. Chatrowsky [1] zugrunde gelegt werden[11]). Von D. Raikov wurde die Schlußweise von Erdös-Landau auf reelle Punktmengen übertragen und L. Chatrowsky stellte eine zu (6) analoge Formel für beliebige Punktmengen aus dem r-dimensionalen

---

[10]) Siehe [5], Satz 5.

[11]) Insbesondere wird die Anzahlfunktion durch das innere Lebesguesche Maß ersetzt.

Raum auf. Die Übertragung unserer Ergebnisse auf derartige Punktmengen liefert eine zu (4) analoge Abschätzung und bedeutet daher eine Verbesserung der Abschätzung von L. Chatrowsky. Auch die Abschätzungen (15), (16) und (17) lassen sich ohne Schwierigkeit übertragen, wobei noch in der Voraussetzung zu (17) die arithmetische Bedingung wegfällt.

II. Teil.

Wir kommen nun zum Beweis der Ungleichung (1), die eine Verbesserung der Ungleichung (16) für den Fall $r = 2$ darstellt. Wir formulieren die Behauptung als

Satz 4. *Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen nichtnegativer Gitterpunkte der Ebene mit den Dichten α bzw. β, und es sei $0 \in \mathfrak{B}$. Dann genügt die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ der Abschätzung*

$$\gamma \geqq \alpha + \frac{\alpha}{2}(1-\alpha)\beta.$$

Beweis. Wir können $0 \notin \mathfrak{A}$ und $\alpha > 0$ annehmen, was keine Einschränkung bedeutet. Es sei $\mathfrak{n} = (n', n'') \in \mathfrak{N}$ ein beliebiger, aber fester Gitterpunkt. Zu jedem ganzzahligen i mit $0 \leqq i \leqq n'$ seien

$$(i, a''_{i1}), (i, a''_{i2}), \ldots, (i, a''_{it_i}) \tag{18}$$

alle Elemente aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$, deren erste Komponente gleich i ist; die zweiten Komponenten seien nach wachsender Größe geordnet. Wir setzen

$$a''_{i\nu+1} - a''_{i\nu} - 1 = u_{i\nu}, \quad (0, u_{i\nu}) = \mathfrak{u}_{i\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, t_i - 1);$$

ist $a''_{it_i} < n''$, so wird noch

$$n'' - a''_{it_i} = u_{it_i}, \quad (0, u_{it_i}) = \mathfrak{u}_{it_i}$$

gesetzt.

Sinngemäß wird mit den zweiten Komponenten verfahren; wir erhalten so zu gegebenem j mit $0 \leqq j \leqq n''$ an Stelle von (18)

$$(a'_{j1}, j), (a'_{j2}, j), \ldots, (a'_{js_j}, j):$$

jetzt setzen wir

$$a'_{j\mu+1} - a'_{j\mu} - 1 = v_{j\mu}, \quad (v_{j\mu}, 0) = \mathfrak{v}_{j\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, s_j - 1);$$

ist $a'_{js_j} < n'$, so wird noch

$$n' - a'_{js_j} = v_{js_j}, \quad (v_{js_j}, 0) = \mathfrak{v}_{js_j}$$

gesetzt.

Mit $\mathfrak{a} = (i, a''_{i\nu}) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ liegt die Menge $\mathfrak{a} + \mathfrak{B}(\mathfrak{u}_{i\nu})$ in $\mathfrak{C}(\mathfrak{n})$; dabei läuft ν von 1 bis $t_i - 1$ oder bis t_i, je nachdem, ob $a''_{it_i} = n''$ oder $a''_{it_i} < n''$ ist. Wegen $0 \in \mathfrak{B}$ liegt $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a} + \mathfrak{B}(\mathfrak{u}_{i\nu})$, und $\mathfrak{a}$ ist nach Konstruktion von $\mathfrak{u}_{i\nu}$ auch der einzige Punkt aus $\mathfrak{A}$, der in $\mathfrak{a} + \mathfrak{B}(\mathfrak{u}_{i\nu})$ liegt. Die Anzahl der natürlichen Gitterpunkte aus $\mathfrak{a} + \mathfrak{B}(\mathfrak{u}_{i\nu})$ ist (wegen $\mathfrak{a} \neq 0$) gleich $1 + B(\mathfrak{u}_{i\nu})$. Daraus folgt

$$C(\mathfrak{n}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \sum_{i,\nu} B(\mathfrak{u}_{i\nu}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \beta \sum_{i,\nu} u_{i\nu},$$

wobei die Summation über alle zuvor angegebenen i und ν läuft. Entsprechend gilt

$$C(\mathfrak{n}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \sum_{j,\mu} B(\mathfrak{v}_{j\mu}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \beta \sum_{j,\mu} v_{j\mu}.$$

Diese beiden Ungleichungen zusammen ergeben

$$C(\mathfrak{n}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \frac{\beta}{2}\left(\sum_{i,\nu} u_{i\nu} + \sum_{j,\mu} v_{j\mu}\right). \tag{19}$$

Nach Definition der $u_{i\nu}$ werden in $\sum_{i,\nu} u_{i\nu}$ alle Punkte $(\bar{a}', \bar{a}'') \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})$ gezählt, die „senkrecht" über einem Punkt aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ liegen, d. h. zu denen es einen Punkt $(a', a'') \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ mit

$$a' = \bar{a}', \quad a'' < \bar{a}''$$

gibt. Wir betrachten jetzt mit festem $\bar{a}'$ die Punkte $(\bar{a}', \bar{a}'') \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})$, zu denen es *keinen* solchen Punkt aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ gibt; ist $(\bar{a}', m)$ derjenige unter ihnen mit der größten zweiten Komponente, so sind es genau die Punkte

$$(20) \qquad (\bar{a}', 0), (\bar{a}', 1), \ldots, (\bar{a}', m).$$

Wieviele dieser Punkte liegen „waagerecht" über einem Punkt aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ und werden daher in $\sum_{j,\mu} v_{j\mu}$ gezählt? Wegen $\alpha > 0$ gilt $(1, 0), (0, 1) \in \mathfrak{A}$ und folglich $\bar{a}' > 1$; $(\bar{a}', 0)$ liegt daher waagerecht über $(1, 0)$. Sei $\mathfrak{m} = (0, m)$, dann ist $A(\mathfrak{m}) \geqq \alpha N(\mathfrak{m}) = \alpha m$; daraus folgt, daß auch noch mindestens αm der von $(\bar{a}', 0)$ verschiedenen Punkte aus (20) waagerecht über einem Punkt aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ liegen. Aus dieser Überlegung ergibt sich insgesamt

$$\sum_{i,\nu} u_{i\nu} + \sum_{j,\mu} v_{j\mu} \geqq \alpha \bar{A}(\mathfrak{n}).$$

Damit erhält man aus (19)

$$C(\mathfrak{n}) \geqq A(\mathfrak{n}) + \frac{\alpha\beta}{2} \bar{A}(\mathfrak{n}) = \left(1 - \frac{\alpha\beta}{2}\right) A(\mathfrak{n}) + \frac{\alpha\beta}{2} N(\mathfrak{n}) \geqq \left(\alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \beta\right) N(\mathfrak{n}),$$

also gilt wie behauptet

$$\gamma \geqq \alpha + \frac{\alpha}{2}(1-\alpha)\beta.$$

Wir weisen noch darauf hin, daß wir bei diesem Beweis von der Menge $\mathfrak{B}$ nur benutzt haben, daß ihre Dichte auf den positiven Halbachsen gleich β ist; man kann sich daher im Satz auf diese Voraussetzung beschränken. Die volle Voraussetzung über $\mathfrak{B}$ für eine derartige Abschätzung tatsächlich auszunutzen, wie es bei der vorhergehenden Basisabschätzung der Fall war, scheint schwierig zu sein, wäre aber von großem Interesse für diese Fragen.

Literatur.

[1] *L. Chatrowsky*, Sur le Théorème de Erdös-Raikov. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR] **9**, 301—310 (1945).

[2] *L. Cheo*, On the density of sets of Gaussian integers. Amer. Math. Monthly **58**, 618—620 (1951).

[3] *P. Erdös*, On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. Acta arithm. **1**, 197—200 (1936).

[4] *F. Kasch*, Abschätzung der Dichte von Summenmengen (Zweite Mitteilung). Math. Zeitschr. **64**, 243—257 (1956).

[5] *M. Kneser*, Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen. Math. Zeitschr. **58**, 459—484 (1953).

[6] *E. Landau*, Über einige neue Fortschritte der additiven Zahlentheorie. Cambridge Tracts No. **35**, Cambridge (1937).

[7] *D. Raikov*, On the addition of point-sets in the sense of Schnirelmann. Mat. Sbornik **5** (= **47**), 425—440 (1939).

[8] *H. Rohrbach*, Einige nenere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jber. dtsch. Math.-Vereinig. **48**, 201—236 (1938).

Eingegangen 12. Dezember 1955.

Einige Bemerkungen zur Arbeit von A. Stöhr: „Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe".

Von *P. Erdös* in Haifa*).

1. In der betreffenden Arbeit von A. Stöhr [1] wird in § 5, Seite 53, die Frage aufgeworfen, welche Mächtigkeit die Klasse der Minimalbasen 7. Art der Ordnung h ($h \geqq 2$) besitzt. Obwohl diese Frage von E. Härtter [2] schon beantwortet wurde, dürfte doch der folgende Beweis von Interesse sein.

Satz 1. *Die Klasse der Minimalbasen 7. Art der Ordnung $h (h \geqq 2)$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis. Bei Stöhr [1] wird bewiesen, daß jede Basis der Ordnung h eine Minimalbasis 7. Art der Ordnung $h^* \geqq h$ als Teilmenge enthält. Also wird es genügen, eine kontinuummächtige Klasse K von Basen $\mathfrak{B}$ zweiter Ordnung anzugeben, so daß der Durchschnitt $\mathfrak{B}_1 \frown \mathfrak{B}_2$ je zweier Elemente $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in K$ endlich ist. Die in diesen Basen $\mathfrak{B}_i \in K$ enthaltenen Minimalbasen 7. Art sind dann offenbar voneinander verschieden. — Demnach können wir uns für den weiteren Verlauf des Beweises auf die Ordnung $h = 2$ beschränken.

Es sei $0 \leqq \alpha < 1$ und $a_k^{(\alpha)} = [(k + \alpha) \log k]$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Sei $\mathfrak{B}_\alpha$ die Folge natürlicher Zahlen, deren Elemente die Zahlen $a_k^{(\alpha)}$ und $a_k^{(\alpha)} + 1$ sind $(k = 2, 3, \ldots)$. Wir beweisen zuerst, daß für $0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ der Durchschnitt $\mathfrak{B}_{\alpha_1} \frown \mathfrak{B}_{\alpha_2}$ endlich ist. Es genügt zu zeigen, daß für genügend großes k die Zahlen $[(k + \alpha_1) \log k] + \varepsilon (\varepsilon = 0$ oder $1)$ nicht in $\mathfrak{B}_{\alpha_2}$ liegen. Wenn nämlich

$$[(k + \alpha_1) \log k] + \varepsilon_1 = [(k' + \alpha_2) \log k'] + \varepsilon_2, \quad 0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < 1, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ oder } 1 \ (i = 1, 2),$$

wäre, so wäre für genügend großes k offenbar $k = k'$ und daher $\alpha_1 = \alpha_2$, was falsch ist.

Nun beweisen wir, daß jede genügend große Zahl als Summe zweier Zahlen aus $\mathfrak{B}_\alpha$ darstellbar, d. h. $\mathfrak{B}_\alpha$ asymptotische Basis zweiter Ordnung ist. Dies folgt aus Sätzen von Kuzmin [3] und Segal [4]. Kuzmin und Segal beweisen nämlich, daß, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben ist, immer eine Zahl $t_0 = t_0(\varepsilon)$ existiert, so daß für $t > t_0$ das Intervall $(t, t + \varepsilon)$ Zahlen von der Form $x \log x + y \log y$ (x, y natürliche Zahlen) enthält; dieser Beweis läßt sich auch auf Zahlen von der Form $(x + \alpha) \log x + (y + \alpha) \log y$ übertragen. Wenn wir nun $\varepsilon = 1$ und $t = n > t_0$ setzen, so folgt, daß ganze Zahlen x und y existieren mit der Eigenschaft

$$n < (x + \alpha) \log x + (y + \alpha) \log y < n + 1.$$

*) Es handelt sich hierbei um Auszüge aus Briefen von P. Erdös an A. Stöhr zu der obengenannten Arbeit, die für den Druck freundlicherweise von E. Härtter bearbeitet wurden.

Also gilt entweder

$$n = [(x + \alpha) \log x] + [(y + \alpha) \log y]$$

oder

$$n - 1 = [(x + \alpha) \log x] + [(y + \alpha) \log y].$$

Im ersten Fall ist die Basiseigenschaft bewiesen; im zweiten Fall setzen wir

$$n = ([(x+\alpha) \log x] + 1) + [(y + \alpha) \log y],$$

womit auch hier gezeigt ist, daß sich jede genügend große Zahl n als Summe zweier Zahlen aus $\mathfrak{B}_\alpha$ darstellen läßt.

Schließlich ergänzen wir noch $\mathfrak{B}_\alpha$ durch Hinzufügen endlich vieler Elemente zu einer Basis zweiter Ordnung, was den Beweis vollendet.

2. In der Stöhrschen Arbeit wird in § 11, Seite 124, folgende Frage aufgeworfen:

Sei $\mathfrak{P}$ die Menge der Primzahlen und $\mathfrak{B}$ eine beliebige Basis zweiter Ordnung. Ist dann die Dichte von $\mathfrak{P} + \mathfrak{B}$ positiv?

Diese Frage möchte ich verneinen, denn es gilt der

Satz 2. *Es gibt eine Basis $\mathfrak{B}_0$ zweiter Ordnung derart, daß die Dichte von $\mathfrak{P} + \mathfrak{B}_0$ gleich 0 ist.*

Beweis. Sei

$$n_1 = 1,$$
$$n_{k+1} = \prod_{p < e^{n_k}} p \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

also $n_k \mid n_{k+1}$. Dann ist $n_{k+1} \geqq 2n_k$, wie man leicht durch einen induktiven Schluß bestätigt: Es ist $n_2 = \prod_{p<e} p = 2 \geqq 2n_1$. Sei nun schon für alle $\varkappa \leqq k - 1$ bewiesen, daß $n_{\varkappa+1} \geqq 2n_\varkappa$ gilt. Dann erhalten wir

$$2n_k = 2 \prod_{p < e^{n_{k-1}}} p < \prod_{p < e^{n_k}} p = n_{k+1},$$

weil $n_k \geqq 2n_{k-1}$ ist und daher nach dem bekannten Primzahlsatz zwischen $e^{n_{k-1}}$ und e^{n_k} mindestens eine Primzahl liegt.

Nun definieren wir $\mathfrak{B}_0$ als die Vereinigungsmenge

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k \cup \{0\}$$

der Mengen $\mathfrak{B}_k$ mit 0, wobei $\mathfrak{B}_k$ aus den Zahlen $n_k \leqq b \leqq 2n_k$ und den Zahlen $b \equiv 0 \pmod{n_k}$, $2n_k \leqq b \leqq n_{k+1}$, besteht. Offenbar ist dann $\mathfrak{B}_0$ eine Basis zweiter Ordnung.

Wir zeigen nun, daß die Dichte von $\mathfrak{P} + \mathfrak{B}_0$ gleich 0 ist. Zu diesem Zweck teilen wir die Zahlen $t = p + b \leqq n_{k+1}$, $p \in \mathfrak{P}$, $b \in \mathfrak{B}_0$, in zwei Klassen ein. Die erste Klasse besteht aus allen Zahlen t mit $b \leqq 2n_k$. Die Anzahl dieser Zahlen ist kleiner als

$$(2n_k + 1) \cdot \pi(n_{k+1}) < cn_k \frac{n_{k+1}}{\log n_{k+1}} = o(n_{k+1}).$$

Denn es folgt aus dem Primzahlsatz (oder auch aus einem mehr elementaren Resultat), daß

$$\log n_{k+1} = \sum_{p < e^{n_k}} \log p > ce^{n_k},$$

also

$$\frac{n_k}{\log n_{k+1}} = o(1)$$

ist.

Die zweite Klasse enthält die Zahlen $t = p + b \leqq n_{k+1}$ mit $b > 2n_k$, also mit $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, n_k)$. Wenn $p \leqq n_k$ ist, so ist die Anzahl dieser Zahlen höchstens

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot \pi(n_k) = o(n_{k+1}).$$

Für $p > n_k$ sind wegen $b \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, n_k)$ die Zahlen $p + b$ zu n_k teilerfremd, also ist in diesem Fall die Anzahl der Zahlen t höchstens

$$n_{k+1} \cdot \prod_{p \leqq n_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = o(n_{k+1}),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

3. Eine Basis $\mathfrak{B} = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ $(b_0 = 0 < b_1 = 1 < b_2 < \cdots)$ der endlichen Ordnung h heißt *beständige Basis*, wenn für jede Folge von Indizes n_i $(n_0 = 0,\ n_1 = 1)$ mit positiver Dichte die Teilmenge

$$\mathfrak{B}' = \{b_{n_0}, b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots\} \qquad (b_{n_0} = 0 < b_{n_1} = 1 < b_{n_2} < \cdots)$$

aus $\mathfrak{B}$ wieder eine Basis endlicher Ordnung ist.

Dann gilt

Satz 3. *Es gibt eine Zahl l, die nur von $\mathfrak{B}$ und der Dichte α der Folge $\{n_i\}$ abhängt, so daß die Ordnung von $\mathfrak{B}'$ kleiner als l ist.*

Hiermit wird eine von Stöhr [1], Seite 117, aufgeworfene Frage positiv beantwortet.

Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre falsch; dann gäbe es eine Zahl $\alpha_0 > 0$ und eine Folge von Folgen $\mathfrak{A}_k = \{n_i^{(k)}\}$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit Dichten $> \alpha_0$, so daß die Teilmengen $\mathfrak{B}'_k = \{b_{n_0^{(k)}}, b_{n_1^{(k)}}, \ldots\}$ $(b_{n_0^{(k)}} = 0 < b_{n_1^{(k)}} = 1 < b_{n_2} < \cdots)$ aus $\mathfrak{B}$ keine Basen mit Ordnungen $\leqq l$ (l fest) wären. Dies würde aber bedeuten, daß es zwei sehr rasch gegen unendlich strebende Folgen $\{l_i\}$ und $\{m_i\}$ mit $l_1 < m_1 < l_2 < m_2 < \cdots,\ l_k > m_{k-1}^2$, gibt, so daß m_k nicht als Summe von weniger als l_k Elementen aus $\mathfrak{B}'_k$ darstellbar ist.

Wir betrachten nun die Folge $N_0 = 0,\ N_1 = 1,\ N_2, \ldots$, deren Elemente im Intervall $m_{k-1} \leqq x \leqq m_k$ die Zahlen $n_i^{(k)}$ sind. Wenn m_k genügend rasch gegen unendlich strebt, so ist es klar, daß die Dichte der Folge $\{N_i\}$ positiv ist. Wir zeigen nun, daß

$$\mathfrak{N} = \{b_{N_0}, b_{N_1}, b_{N_2}, \ldots\} \qquad (b_{N_0} = 0 < b_{N_1} = 1 < b_{N_2} < \cdots)$$

keine Basis endlicher Ordnung ist, und mit diesem Widerspruch wird unser Beweis vollendet sein.

Zu diesem Zweck beweisen wir, daß die Anzahl der Summanden $b_{N_i} \in \mathfrak{N}$, die wir zur Darstellung von m_k brauchen, mit k gegen unendlich strebt. Nehmen wir an, es gäbe ein c so, daß jedes m_k als Summe von höchstens c Summanden $b_{N_i} \in \mathfrak{N}$ darstellbar ist. Sei also

$$m_k = b^{(1)} + b^{(2)} + \cdots + b^{(c_1)}, \quad c_1 \leqq c,\ 0 < b^{(i)} \in \mathfrak{N}.$$

Wir wählen die Numerierung so, daß $b^{(1)}, \ldots, b^{(r)} (r \leqq c_1)$ kleiner als m_{k-1} sind und $b^{(r+1)}, \ldots, b^{(c_1)}$ im Intervall $m_{k-1} \leqq x \leqq m_k$ liegen. Also können wir schreiben

$$(1) \qquad m_k = 1 + 1 + \cdots + 1 + b^{(r+1)} + \cdots + b^{(c_1)},$$

wobei der Summand 1 $(b^{(1)} + b^{(2)} + \cdots + b^{(r)})$-mal auftritt. Alle Summanden in (1) sind Elemente aus der Menge $\mathfrak{B}'_k$, also ist m_k als Summe von höchstens $c + cm_{k-1}$ Elementen aus $\mathfrak{B}'_k$ darstellbar, was aber für genügend großes k wegen

$$l_k > m_{k-1}^2 > c + cm_{k-1}$$

einen Widerspruch bedeutet, womit Satz 3 bewiesen ist.

Literaturverzeichnis.

[1] *A. Stöhr*, Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. Journal für reine u. angew. Math. **194** (1955), 40—65, 111—140.

[2] *E. Härtter*, Ein Beitrag zur Theorie der Minimalbasen. Journal für reine u. angew. Math. **196** (1956), 170—204.

[3] *R. Kuzmin*, Sur quelques approximations transcendantes de Diophante. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. Nr. **1** (1933), 9—13.

[4] *B. Segal*, Application of the Theorem concerning the fractional parts of a function to a certain additive problem. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. Nr. **1** (1933), 5—8.

Eingegangen 10. Januar 1956.

Berichtigung zu der Arbeit

Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren.

Von *M. Eichler* in Marburg.

Der Beweis der Spurformel (51) in Satz 10 der in Band 195 dieses Journals S. 127 bis 151 erschienenen Arbeit ist insofern irrtümlich, als die auf S. 144/145 einer Ordnung $\mathfrak{O}_{\nu\mu}$ zugeordneten Größen f und (2) nicht von den Indizes ν, μ unabhängig sind. Eine leichte Umformulierung macht den Beweis jedoch richtig:

An Stelle von (59) schreibe man

$$\mathfrak{J}_1 \mathfrak{A}_{\nu\mu} = \mathfrak{M}_\nu \mathfrak{D}_\nu \gamma_{\nu\mu} = \mathfrak{M}_\nu \mathfrak{T}_{\nu\lambda} \gamma_{\nu\mu} \delta_{\nu\mu}, \tag{59*}$$

wobei $\mathfrak{J}_{\nu\mu} \delta_{\nu\mu}$ ein ambiges Hauptideal ist. Wie gezeigt, wird $\mathfrak{A}_{\nu\mu}$ durch $\mathfrak{O}_{\nu\mu}$ bis auf einen Faktor $\mathfrak{B}$ festgelegt, für welchen $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{B}$ und daher auch $\mathfrak{J}_{\nu\mu} \mathfrak{B}$ ambig sind. Zu einem $\mathfrak{O}_{\nu\mu}$ gehören $z_{\nu\mu} 2^{\varkappa'} h_0 f_{\nu\mu}^{-1}$ $\mathfrak{O}_1$-Idealklassen. Hierbei ist $z_{\nu\mu} = 1$ oder 2, je nachdem es ein ambiges $\mathfrak{J}_{\nu\mu}$-Ideal $\mathfrak{J}_{\nu\mu} \zeta_\omega$ (für ζ, ω s. den Text) gibt oder nicht; ferner ist $f_{\nu\mu}$ die Anzahl der $\mathfrak{O}_1$-Ideale $\mathfrak{O}_1 \omega$, welche die Relativdiskriminante von $\mathfrak{J}_1$ teilen und ambige $\mathfrak{J}_{\nu\mu}$-Ideale $\mathfrak{J}_{\nu\mu} \omega$ erzeugen.

Umgekehrt wurde gezeigt, daß zu einem $\mathfrak{O}_1$-Ideal $\mathfrak{A}_{\nu\mu}$ auch eine Ordnung $\mathfrak{O}_{\nu\mu}$ gehört. Diese hängt nicht allein von $\mathfrak{A}_{\nu\mu}$, sondern noch von dem Faktor $\delta_{\nu\mu}$ in (59*) ab. Dieser Faktor steht hier im Gegensatz zu (59) und (60) auf der rechten Seite von $\gamma_{\nu\mu}$, und das macht folgende Änderung im mittleren Absatz auf S. 145 notwendig: die Anzahl der einem $\mathfrak{A}_{\nu\mu}$ zugeordneten $\mathfrak{O}_{\nu\mu}$ ist $\frac{z_{\nu\mu}}{2} [\Delta_{\nu\mu} : \Delta_{\nu\mu} \cap k(\mathfrak{O}_1)]$, wobei $\Delta_{\nu\mu}$ die Gruppe der $\delta_{\nu\mu}$ ist. Diese Anzahl ist aber gleich $\frac{z_{\nu\mu} q_\nu}{2 f_{\nu\mu} w(\mathfrak{O})}$. Nun ist es entscheidend, daß alle einem $\mathfrak{A}_{\nu\mu}$ zugeordneten $\mathfrak{O}_{\nu\mu}$ miteinander durch innere Automorphismen von $\mathfrak{J}_{\nu\mu}$ verbunden sind. Hieraus geht hervor, daß die $f_{\nu\mu}$ und $z_{\nu\mu}$ für alle demselben $\mathfrak{A}_{\nu\mu}$ zugeordneten $\mathfrak{O}_{\nu\mu}$ übereinstimmen.

Teilt man nun, bei festgehaltenem Index ν, die $\mathfrak{O}_{\nu\mu}$ und die ihnen entsprechenden $\mathfrak{A}_{\nu\mu}$ in Klassen je nach dem Wert der Indizes $f_{\nu\mu}$ und $z_{\nu\mu}$, so wird, wenn $g_\nu^{(i)}$ und $h_\nu^{(i)}$ die Anzahlen der $\mathfrak{O}_{\nu\mu}$ und $\mathfrak{A}_{\nu\mu}$ in diesen Klassen bezeichnen,

$$g_\nu = \sum_i g_\nu^{(i)}, \; h_\nu = \sum_i h_\nu^{(i)}, \; \frac{z_{\nu\mu} q_\nu}{2 f_{\nu\mu} w(\mathfrak{O})} h_\nu^{(i)} = \frac{2^{\varkappa'} h_0 z_{\nu\mu}}{f_{\nu\mu}} g_\nu^{(i)}.$$

Damit wird der Schluß auf S. 145 durchführbar.

Eingegangen 14. September 1956.

127
ung
Eine

inen
$\mathfrak{D}_{\nu\mu}$
iges
der
eale

hört.
ieser
das
nem

Diese

eten

geht

hen-
d $h_\nu^{(i)}$